Vorlesung 5

Polynomiale Gleichungen

Definition 5.0.3. Ein polynomiale Funktion $p(x)$ in der Variablen $x \in \mathbb{R}$ ist eine endliche Summe von Potenzen von x, die Exponenten sind hierbei natürliche Zahlen.
Wir haben die Darstellung

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $a_j \in \mathbb{R}, j = 0, \ldots, n$.
In nicht ganz korrekter Sprechweise nennen wir eine polynomiale Funktion p in x kurz ein Polynom in x. Den Unterschied zwischen einer polynomialen Funktion und eines Polynoms wird in der Vorlesung „Lineare Algebra" erörtert. Falls $a_n \neq 0$, so ist $p(x)$ ein Polynom von Grad n. Der Koeffizient $a_n \neq 0$ heißt Leitkoeffizient und a_0 heißt Absolutglied. Wir bezeichnen $a_1 x$ als lineares Glied, $a_2 x^2$ als quadratisches Glied und $a_3 x^3$ als kubisches Glied.
Falls die Koeffizienten $a_j, j = 0, 1, \ldots, n$, und $a_n \neq 0$, von $p(x)$ alle rational sind, so sagen wir, dass $p(x)$ ein ganzrationales Polynom von Grad n ist.

5.1 Lineare Gleichungen

Für $n = 1$ haben wir ein lineares Polynom

$$p(x) = ax + b, a \neq 0.$$

Wir können die Frage stellen, wann dieses Polynom verschwindet. Anders ausgedrückt: Für welche Werte von x nimmt $p(x)$ den Wert 0 an? Alternativ gefragt: Was sind die Nullstellen von $p(x)$?
Hierzu setzen wir

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

Somit hat $p(x)$ als einzige Nullstelle $x = -\frac{b}{a}$.

5.2 Quadratische Gleichungen

Für $n = 2$ haben wir ein quadratisches Polynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$. Auch hier können wir nach Nullstellen von $p(x)$ fragen. Für welche x gilt $ax^2 + bx + c = 0$?
Zunächst können wir durch $a \neq 0$ dividieren, und erhalten $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.
Da wir stets durch den Leitkoeffizienten (dieser ist ungleich 0 vorausgesetzt) dividieren können, können wir uns auf Polynome mit Leitkoeffizient 1 beschränken.
Es gilt nun

$$x^2 + px + q = 0$$

zu lösen ($p = \frac{b}{a}, q = \frac{c}{a}$).
Dazu wenden wir *quadratische Ergänzung* an. Wir wollen x^2+px+q überführen in die Form

$$x^2 + px + q = (x + t)^2 + m.$$

Wir beachten, dass gilt $(x + t)^2 = x^2 + 2tx + t^2$. Ein Koeffizientenvergleich mit $x^2 + px + q$ liefert $2t = p$, d.h. $t = \frac{p}{2}$ und damit $t^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$. Somit gilt

$$x^2 + px + q = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q.$$

Die quadratische Ergänzung von $x^2 + px + q$ ist also $\left(\frac{p}{2}\right)^2$, d.h. wir lesen den Koeffizienten des linearen Terms ab, halbieren und quadrieren anschliessend.

Wir addieren zur Gleichung $x^2 + px + q = 0$ also auf beiden Seiten $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ hinzu,

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

Nun wenden wir auf der linken Seite die erste binomische Formel an,

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

Lösen wir nun nach x auf, so erhalten wir

$$x = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} - \frac{p}{2}.$$

Die quadratische Ergänzung führt also zur sogenannten $p, q-$Formel bzw. Mitternachtsformel.

Bemerkung. Vermeiden Sie nach Möglichkeit die Benutzung der Mitternachtsformel, sondern benutzen Sie als Mittel der Wahl die quadratische Ergänzung.

Wir setzen $D := \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ und nennen den Ausdruck die Diskriminante der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$.
Offenbar hat die quadratische Gleichung

- genau zwei reellwertige Lösungen, wenn $D > 0$.

- genau eine reellwertige Lösung, wenn $D = 0$.

- keine reellwertige Lösung, wenn $D < 0$.

5.3 Polynomgleichungen höheren Grades

Bevor wir uns Polynomgleichungen höheren Grades widmen, können wir die Frage stellen, wieviele Nullstellen ein Polynom n-ten Grades hat. Eine erschöpfende Antwort gibt darauf der

Satz 5.3.1 (*Fundamentalsatz der Algebra)*. Jedes Polynom n-ten Grades hat genau n komplexwertige Nullstellen (mit Vielfachheiten gezählt).

Dabei sind die komplexen Zahlen eine Erweiterung der reellen Zahlen. Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt: Ein Polynom n-ten Grades hat maximal n reellwertige Nullstellen (mit Vielfachheiten gezählt).

Definition 5.3.2. Eine Nullstelle a eines Polynoms $p(x)$ von Grad n hat die *Vielfachheit* k $(k \leq n)$ falls sich $p(x)$ schreiben lässt als

$$p(x) = (x - a)^k \cdot g(x),$$

wobei $g(x)$ ein Polynom vom Grad $n - k$ ist mit $g(a) \neq 0$.

Beispiel: Wir betrachten $p(x) = x^3 = (x-0)^3 \cdot 1$. Hier ist $g(x) = 1$ ein Polynom vom Grad 0, und damit $x = 0$ eine Nullstelle von der Vielfachheit 3.

5.3.1 Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen durch Radikale

Zur Lösung einer algebraischen Gleichung, wie sie ganzrationale Polynome definieren, benötigen wir die bekannten Operationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und das Wurzelziehen. Es stellt sich die Frage, ob es stets möglich ist, durch wiederholte Anwendung dieser Operationen, die Lösungen aus den Koeffizienten des Polynoms zu gewinnen. Das ist die berühmte Frage nach der Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen durch Radikale.
Für $n = 1$ und $n = 2$ haben wir gesehen, dass Lösungsformeln existieren und die Auflösbarkeit durch Radikale gegeben ist. Existieren Lösungsformeln für Polynomgleichungen mit Grad $n \geq 3$?
Diese Frage konnte der französische Mathematiker Galois im 19. Jahrhundert vollständig beantworten. Eine Schlussfolgerung der Galois-Theorie ist: Für eine Polynomgleichung vom Grad $n \geq 5$ existieren im Allgemeinen keine Lösungsformeln in Form von Radikalen.
Für $n = 3$ und $n = 4$ existieren Lösungsformeln. Diese sind aber recht kompliziert, so dass wir nun alternative Ansätze für bestimmte Gleichungen besprechen. Ausgangspunkt ist das *Lemma von Gauß*.

5.3.2 Lemma von Gauß

Satz 5.3.3 (Lemma von Gauß)**.** Vorgelegt sei die Polynomgleichung

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

mit $a_j \in \mathbb{Z}, j = 0, \ldots, n$. Ferner gelte $a_n \neq 0$ und $a_0 \neq 0$.
Falls $x = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $(p, q) = 1$ eine rationale Lösung der Polynomgleichung ist, so gilt:

(i) p ist ein Teiler des Absolutglieds a_0.

(ii) q ist ein Teiler des Leitkoeffizienten a_n.

Beispiel zur Anwendung: Wir betrachten die Gleichung

$$x^3 + 15x^2 + 23x - 231 = 0.$$

Wir setzen $p(x) := x^3 + 15x^2 + 23x - 231$. Der Leitkoeffizient von $p(x)$ ist 1, das Absolutglied ist -231. Nach dem Lemma von Gauß können als ganzzahlige Nullstellen von $p(x)$ nur die Teiler von 231 in Frage kommen. Die Primfaktorzerlegung von 231 ist $231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$. Somit sind die Teiler von 231 gerade die in $T_{231} = \{1, 3, 7, 11, 21, 33, 77, 231\}$ enthaltenen Elemente. Wir raten, dass $x = 3$ eine Nullstelle ist und finden $p(3) = 3^3 + 15 \cdot 3^2 + 23 \cdot 3 - 231 = 0$, dass $x = 3$ tatsächlich eine Nullstelle ist. Damit lässt sich $p(x)$ schreiben als $p(x) = (x-3)g(x)$, wobei $g(x)$ ein Polynom von Grad 2 ist. Die Nullstellen von $g(x)$ sind auch Nullstellen von $p(x)$.
Da $g(x)$ der Quotient von $p(x)$ und $(x - 3)$ ist, können wir $g(x)$ wie folgt durch Polynomdivision bestimmen:

$$g(x) = p(x) : (x - 3) = (x^3 + 15x^2 + 23x - 231) : (x - 3) = x^2 + 18x + 77.$$

Für $g(x)$, als Polynom von Grad 2, wissen wir, wie wir die Nullstellen bestimmen. Die Strategie zur Lösung von Polynomgleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten ist zum Beispiel so vorzugehen:

- Mit dem Lemma von Gauß bestimmen wir mögliche rationale Lösungen.

- Liegen tatsächlich rationale Lösungen vor, so können wir Polynomdivision durchführen und reduzieren so den Grad des Polynoms. Wir führen diesen Vorgang solange fort, bis wir einen Grad erreicht haben, von dem wir wissen, wie wir die Nullstellen analytisch bestimmen können.

  Wir beweisen nun das Lemma von Gauß.

Beweis. Sei $x = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $(p, q) = 1$ eine rationale Lösung der Polynomgleichung, also

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0.$$

Dann ist

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) = -a_0.$$

Multiplizieren mit q^n liefert

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_1 p q^{n-1} = -a_0 q^n.$$

Ausklammern von p auf der linken Seite ergibt

$$p(\underbrace{a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \ldots + a_1 q^{n-1}}_{\in \mathbb{Z}}) = -a_0 q^n.$$

Daraus folgt: p ist ein Teiler von $a_0 q^n$. Da p und q teilerfremd sind, sind auch p und q^n teilerfremd. Mithin muss p ein Teiler von a_0 sein.
Analog können wir die Polynomgleichung wie folgt umstellen:

$$q(\underbrace{a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} q + \ldots + a_0 q^{n-1}}_{\in \mathbb{Z}}) = -a_n p^n.$$

Daraus folgt: q ist ein Teiler von $a_n p^n$. Da p und q teilerfremd sind, ist q also ein Teiler von a_n. $\square$