Vorlesung 6

Lineare Gleichungssysteme

Gegeben sei eine lineare Gleichung über $\mathbb{R}$

$$5x + 2 = 0.$$

Diese Gleichung ist eine Beschreibung des Elements $x = -\frac{2}{5}$, denn genau dieses erfüllt die Gleichung.
Offenbar ist eine lineare Gleichung in einer Variablen x

$$ax + b = e,\ a \neq 0$$

immer lösbar mit

$$x = \frac{e - b}{a}.$$

6.1 Gaußsches Eliminationsverfahren

In der Folge betrachten wir lineare Gleichungssysteme mit m Gleichungen und n Variablen:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\quad & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Hierbei sind die Koeffizienten durch a_{ij} mit $i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n$, sowie b_k mit $k = 1, 2, ..., m$ gegeben.
Jedes n-Tupel $x = (x_1, ..., x_n)$, welches dem linearen Gleichungssystem genügt, heißt Lösung des LGS. Zur Bestimmung von x benutzen wir das Gaußsche Eliminationsverfahren.

Dabei führen wir wiederholt elementare Zeilenumformungen durch, die das Gleichungssystem in die sogenannte Zeilenstufenform überführen (Erklärung dazu später). Die elementaren Umformungen verändern die Lösungemenge nicht. In

der Zeilenstufenform lässt sich eine mögliche Lösung schnell ablesen.
Elementare Zeilenoperationen sind:

- das Addieren von Vielfachen einer Zeile zu einer Zeile
- Vertauschen von zwei Zeilen

Wir illustrieren das Gaußsche Eliminationsverfahren an einem Beispiel:
Vorgelegt sei das folgende LGS mit zwei Variablen $x, y \in \mathbb{R}$ und zwei Gleichungen (D.h. $m = n = 2$):

$$\begin{array}{cc} \text{(I)} & 3x + 4y = 12 \\ \text{(II)} & 9x + 2y = -14. \end{array}$$

Wir ersetzen die (II). Zeile durch 3(I)−(II) und erhalten als neues LGS

$$\begin{array}{cc} \text{(I)} & 3x + 4y = 12 \\ \text{(II)} & 0x + 10y = 50. \end{array}$$

Damit haben wir bereits die sogenannte Zeilenstufenform erreicht. Ein LGS ist in **Zeilenstufenform**, wenn jede Zeile mindestens eine Variable weniger hat als die vorangegangene Zeile. Aus Zeile (II) lesen wir ab:

$$10y = 50 \Rightarrow y = 5.$$

Einsetzen von $y = 5$ in (I) liefert:

$$3x + 4 \cdot 5 = 12 \Rightarrow 3x = -8 \Rightarrow x = -\frac{8}{3}.$$

Damit ist $x = -\frac{8}{3}$ und $y = 5$ Lösung des LGS.

Um den Schreibaufwand gering zu halten, ordnen wir die Koeffizienten in der Form

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dies ist die Koeffizientenmatrix des LGS. Die erweiterte Koeffizientenmatrix enthält darüber hinaus in der letzten Spalte die Werte der rechten Seite der Gleichungen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 12 \\ 9 & 2 & -14 \end{array}\right)$$

Die durchgeführten elementaren Zeilenoperationen werden dokumentiert:

$$\overset{\text{(II)}\to 3\text{(I)}-\text{(II)}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 12 \\ 0 & 10 & 50 \end{array}\right) \overset{\text{(II)}\to \frac{1}{5}\text{(II)}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Zurück zu einem beliebigen LGS mit m Gleichungen und n Variablen:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{6.1}$$

Die Koeffizienten a_{ij} mit $i = 1, 2, ..., m$ und $j = 1, 2, ..., n$ ordnen wir zweckmäßig in der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ein solches Schema bezeichnen wir als Matrix. Genauer: $(m \times n)$-Matrix bestehend aus m Zeilen und n Spalten. Wir betrachten die Spalten dieser Matrix

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \; v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Diese Spalten können wir als $(m \times 1)$-Matrizen auffassen, kurz auch m-Tupel von Zahlen genannt. Die Addition von m-Tupeln kann auf nahliegende Weise definiert werden:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c_1 + d_1 \\ \vdots \\ c_m + d_m \end{pmatrix},$$

ebenso die Multiplikation eines m-Tupels mit einer reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$:

$$a \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot c_1 \\ \vdots \\ a \cdot c_m \end{pmatrix}.$$

Für das m-Tupel $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ schreiben wir kurz b. Das LGS (6.1) lässt sich kurz schreiben als

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n = b. \tag{6.2}$$

Prägnante Redeweise: Wir nennen ein n-Tupel

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

für welches (6.1) oder (6.2) gilt, eine Lösung des LGS.

6.2 Matrizenmultiplikation

Das LGS lässt sich noch kürzer schreiben. Dazu bedarf es der Einführung der Matrizenmultiplikation. Sei A eine $(m \times n)$-Matrix, B eine $(n \times l)$-Matrix:

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}, \; B = (b_{jk})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq l}$$

Die Anzahl der Spalten von A entspricht der Anzahl der Zeilen von B. Es bezeichne $M_{m \times n} = (M_{m \times n}, \mathbb{R})$ die Menge der $(m \times n)$-Matrizen mit reellen Einträgen.

Definition 6.2.1 (Matrizenmultiplikation)**.** Wir definieren eine Verknüpfung

$$\begin{aligned} \cdot : M_{m \times n} \times M_{n \times l} &\to M_{m \times l} \\ (A, B) &\mapsto C = A \cdot B \end{aligned}$$

durch

$$c_{ik} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}.$$

Wir erhalten also c_{ik} durch komponentenweise Multiplikation der i-ten Zeile von A mit der k-ten Spalte von B.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \\ 6 & 8 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 9 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

A ist eine (4×2)-Matrix und B eine (2×3)-Matrix. Das Produkt von A und B ist eine (4×3)-Matrix C. In diesem Beispiel ist die Multiplikation von B und A nicht definiert, denn die Spaltenanzahl von B stimmt nicht mit der Zeilenanzahl von A überein. Wir haben

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \\ 6 & 8 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 4 & 9 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 7 + 3 \cdot 8 & 7 \cdot 4 + 3 \cdot 1 & 7 \cdot 9 + 3 \cdot 5 \\ 2 \cdot 7 + 5 \cdot 8 & 2 \cdot 4 + 5 \cdot 1 & 2 \cdot 9 + 5 \cdot 5 \\ 6 \cdot 7 + 8 \cdot 8 & 6 \cdot 4 + 8 \cdot 1 & 6 \cdot 9 + 8 \cdot 5 \\ 9 \cdot 7 + 0 \cdot 8 & 9 \cdot 4 + 0 \cdot 1 & 9 \cdot 9 + 0 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 73 & 31 & 78 \\ 54 & 13 & 43 \\ 106 & 32 & 94 \\ 63 & 36 & 81 \end{pmatrix}}_{=C}.$$

Beispiel:

Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

eine $(m \times n)$-Matrix, sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ eine $(n \times 1)$-Matrix (also ist x ein n-Tupel) und sei $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$. Wir definieren

$$b_j := \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k.$$

Also ist $b = Ax$, denn

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Mit der Matrizenmultiplikation lässt sich das LGS (6.1) also kompakt schreiben als

$$A \cdot x = b.$$

6.3 Addition von Matrizen

Definition 6.3.1 (Addition von Matrizen)**.** Die Addition von Matrizen $A, B \in M_{m\times n}$ definieren wir in naheliegender Weise

$$A + B := (a_{ij}) + (b_{ij}).$$

6.4 Matrizenring $M_{n\times n}$

Für $m = n$ erhalten wir die Menge der quadratischen Matrizen $M_{n\times n}$. Es gilt: $(M_{n\times n}, +, \cdot)$ bildet einen Ring mit Einselement. Das neutrale Element bezüglich der Addition ist die sogenannte Nullmatrix, deren Einträge alle Null sind. Das additive Inverse von $A \in M_{n\times n}$ ist $-A$. Die Addition ist aufgrund der Definition offenbar assoziativ und abelsch. Das neutrale Element bezüglich der Multiplikation (also das Einselement) ist die sogenannte Einheitsmatrix

$$\mathbb{E}_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

alle Einträge auf der Hauptdiagonalen sind gleich 1 und alle anderen Einträge gleich 0. Insbesondere ist die Matrizenmultiplikation assoziativ in $M_{n\times n}$, d.h. für $A, B, C \in M_{n\times n}$ gilt

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

Ein Beispiel für einen Ring ohne Einselement ist der Ring der geraden Zahlen $2\mathbb{Z}$.