Vorlesung 7

Determinanten und Ungleichungen

7.1 Determinante

Mit der Matrizenmultiplikation (siehe Vorlesung 6) lässt sich das LGS (6.1) kompakt schreiben als

$$Ax = b.$$

A und b sind gegeben und wir interessieren uns für die Lösung x.
Es sind zentrale Themen der linearen Algebra folgende Fragen zu beantworten:

- Unter welchen Bedingungen hat das LGS $Ax = b$ Lösungen?
- Wann gibt es eine eindeutige Lösung?
- Wann keine bzw. unendlich viele Lösungen?

Diese Fragen beantworten wir nun zur Illustration für Gleichungssysteme mit 2 Gleichungen und 2 Variablen. Den allgemeinen Fall behandeln Sie in der B1-Vorlesung (Lineare Algebra I).
Wir betrachten das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrcl} \text{(I)} & ax + by & = & e \\ \text{(II)} & cx + dy & = & f \end{array}$$

Was sind die Bedingungen an die Koeffizienten a, b, c, d, damit es eine Lösung gibt? Keine Lösung? Mehrere Lösungen?
Sei einer der Koeffizienten ungleich 0, etwa $a \neq 0$.
Wir führen die Zeilenoperation (II) $\to$ (II) $- \frac{c}{a}$(I) durch:

$$\begin{array}{rrcl} \text{(I)} & ax + by & = & e \\ \text{(II)} & 0 + \left(d - b\,\dfrac{c}{a}\right)\,y & = & f - \dfrac{c}{a}\,e \end{array}$$

Also gilt:

$$\left(d - b\ \frac{c}{a}\right)\ y = f - \frac{c}{a}\ e.$$

Multiplikation mit a liefert

$$(ad - bc)\ y = af - ce.$$

Es ist entscheidend, ob die Zahl $\delta(a,b,c,d) = ad - bc$ verschieden von Null ist.

Fall A: $\delta(a,b,c,d) \neq 0$

Dann ist

$$y = \frac{af - ec}{ad - bc} = \frac{af - ec}{\delta(a,b,c,d)} = \frac{\delta(a,e,c,f)}{\delta(a,b,c,d)}.$$

Eine leichte Rechnung zeigt:

$$x = \frac{ed - bf}{ad - bc} = \frac{\delta(a,b,f,d)}{\delta(a,b,c,d)}.$$

In diessem Fall A ist das LGS also eindeutig lösbar.

Fall B: $\delta(a,b,c,d) = 0$

Dann ist

$$(ad - bc)\ y = af - ce$$

nicht immer lösbar.
Denn falls die rechte Seite der Gleichung $af - ce \neq 0$, z.B. $a = c = f = 1, e = 0$, dann ist das LGS nicht lösbar.
Falls die rechte Seite der Gleichung $af - ce = 0$, dann können wir für y *jede* beliebige Zahl einsetzen. Das LGS ist dann lösbar, aber nicht eindeutig.
Für die (2×2)-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

heißt $\delta(a,b,c,d)$ *Determinante* von M.
Die Determinante ist entscheidend, ob das von M definierte LGS eindeutig lösbar ist, oder nicht. Jede quadratische $(n \times n)$-Matrix M hat ihre Determinante $\det(M)$. Diese ist eine Funktion:

$$\det\colon\quad M_{n\times n} \to \mathbb{R} \text{ mit } M \mapsto \det(M).$$

Falls $\det(M) \neq 0$, so ist das durch M definierte LGS eindeutig lösbar. Falls $\det(M) = 0$, so ist das durch M definierte LGS nicht lösbar oder nicht eindeutig lösbar. Für $n = 1$ entspricht $\det(M)$ der Matrix M. Beispielsweise ist

$$3x = b$$

eindeutig lösbar, hier ist $M = \det(M) = 3 \neq 0$ und wir erhalten als einzige Lösung $x = \frac{b}{3}$. Auf der anderen Seite ist

$$0 \cdot x = b$$

mit $M = \det(M) = 0$ nicht lösbar, wenn $b \neq 0$ gilt und hat unendlich viele Lösungen, wenn $b = 0$ gilt.

Für $n = 2$, also $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ist $\det(M) = ad - bc$, wie oben gesehen. Wie man $\det(M)$ für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ bestimmt, lernen Sie in der B1-Vorlesung (Lineare Algebra I).

7.2 Ungleichungen

Der Umgang mit Ungleichungen ist ebenso wichtig wie der Umgang mit Gleichungen. Ähnlich wie bei Gleichungen werden Ungleichungen durch Äquivalenzumformungen gelöst. In der Regel geht es darum eine eher unübersichtliche Ungleichung so zu vereinfachen, dass die Lösungsmenge leicht abzulesen, bzw. leicht zu veranschaulichen ist.

Beispiel.

$$\begin{aligned} & x - 2 > 2x - 1 \\ \Leftrightarrow\ & 0 > x + 1 \\ \Leftrightarrow\ & -1 > x. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge sind alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < -1$.

Die durchgeführten Umformungen im Beispiel sowie allgemein das Rechnen mit Ungleichungen beruhen auf den sogenannten **Anordnungsaxiomen** in $\mathbb{R}$. Dabei lässt sich alles auf den Begriff des *positiven Elements* zurückzuführen. In $\mathbb{R}$ sind gewisse Elemente als positiv ausgezeichnet (Schreibweise: $x > 0$), so dass folgende Anordnungsaxiome erfüllt sind:

7.2.1 Anordnungsaxiome

(A1) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Beziehungen:

$$x > 0, \quad x = 0, \quad x < 0.$$

(A2) Sind $x > 0$ und $y > 0$, so folgt $x + y > 0$.

(A3) Sind $x > 0$ und $y > 0$, so folgt $xy > 0$.

Definition 7.2.1. Wir setzen $x > y$, falls $x - y > 0$ gilt. Statt $x > y$ schreiben wir auch $y < x$. $x \geq y$ bedeutet $x > y$ oder $x = y$.

Definition 7.2.2. Ein Körper, in dem gewisse Elemente als positiv ausgezeichnet sind, so dass die Anordnungsaxiome (A1), (A2) und (A3) gelten, heißt *angeordneter Körper*.

Beispielsweise sind $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ angeordnete Körper. $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ ist kein angeordneter Körper, weil (A2) nicht erfüllt ist. Denn $1 > 0$ und $1 + 1 = 0$.
Aus den Anordnungsaxiomen ergeben sich die folgenden Aussagen (i) – (xi), die von der Schule her bekannt sind. Wir beweisen die Aussagen (i), (ii) und (iii); die Beweise der restlichen Aussagen können als Übungsaufgaben angesehen werden. Wir haben also

(i) $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$.

Beweis. $x < 0$ bedeutet nach Definition $0 > x$. Ebenso nach Definition 7.2.1 bedeutet dies $0 - x > 0$, d.h. $-x > 0$. □

(ii) Aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$. (Transitivität)

Beweis. Nach Definition gilt $x < y \Leftrightarrow y - x > 0$ und $y < z \Leftrightarrow z - y > 0$. Mit (A2) folgt dann $(y-x)+(z-y) > 0$. Daraus folgt $z-x > 0 \Leftrightarrow z > x$, d.h. $x < z$. □

(iii) Aus $x < y$ und $a \in \mathbb{R}$ folgt: $a + x < a + y$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $(a + y) - (a + x) - y - x > 0$. Daher ist nach Definition $a + x < a + y$. □

(iv) Aus $x < y$ und $x' < y'$ folgt $x + x' < y + y'$.

(v) Aus $x < y$ und $a > 0$ folgt $ax < ay$.

(vi) Aus $0 \leq x < y$ und $0 \leq a < b$ folgt $ax < by$.

(vii) Aus $x < y$ und $a < 0$ folgt $ax > ay$.

(viii) Für jede reelle Zahl $x \neq 0$ gilt $x^2 > 0$.

(ix) Falls $x \gtrless 0$, so auch $x^{-1} \gtrless 0$.

(x) Aus $0 < x < y$ folgt $x^{-1} > y^{-1}$.

(xi) Es gilt $1 > 0$.

Mit diesen Aussagen können wir Ungleichungen lösen.

7.2.2 Absolutbetrag

Zuweilen interessieren wir uns für den Abstand einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ zur 0. Dieser Abstand wird durch den Absolutbetrag von x bemessen.

Definition 7.2.3. Gegeben sei die Abbildung

$$\begin{aligned} |\cdot| : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_0^+ \\ x &\mapsto |x| \end{aligned}$$

mit

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

Diese Abbildung heißt *Betragsfunktion* und ordnet jedem Element seinen Absolutbetrag zu.

Wir erhalten den Absolutbetrag einer reellen Zahl durch das Weglassen des Vorzeichens. In Abbildung 7.1 ist der Graph der Betragsfunktion dargestellt.

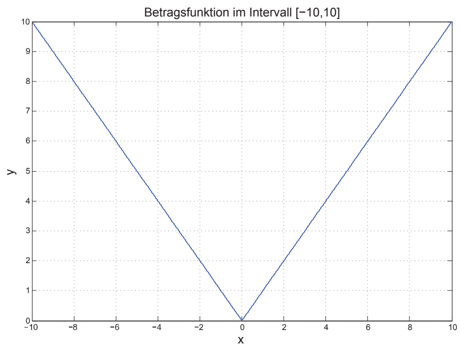


Abbildung 7.1: Betragsfunktion $y = |x|$ mit $x \in [-10, 10]$.

Der Absolutbetrag hat folgende Eigenschaften:

- Offenbar gilt stets $|x| \geq 0$ und $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.
- Wir haben $|-x| = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

  Beweis. 1. Fall: $x \geq 0$.
  Dann gilt $|x| = x$. Ferner $|-x| = -(-x) = x$. Also $|x| = |-x|$.
  2. Fall: $x < 0$.
  Dann gilt $|x| = -x$. Da $x < 0$ ist $-x > 0$. Somit $|-x| = -x$. Also $|x| = |-x|$. $\square$

- Wir haben $|xy| = |x||y|$, für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Beweis. Wir verifizieren diese Identität durch Überprüfung aller vier Möglichkeiten.
1. Fall: $x \geq 0$, $y \geq 0$.
$\Rightarrow xy \geq 0 \Rightarrow |xy| = xy$. Nach Definition der Betragsfunktion gilt aber auch: $|x||y| = xy \Rightarrow |xy| = |x||y|$.

2. Fall: $x < 0$, $y \geq 0$.
$\Rightarrow xy \leq 0 \Rightarrow |xy| = -xy$. Nach Definition der Betragsfunktion gilt aber auch: $|x||y| = x(-y) = -xy \Rightarrow |xy| = |x||y|$.

3. Fall: $x < 0$, $y \geq 0$.
$\Rightarrow |xy| \geq 0 \Rightarrow |xy| = -xy$. Nach Definition der Betragsfunktion gilt aber auch: $|x||y| = -xy \Rightarrow |xy| = |x||y|$.

4. Fall: $x < 0$, $y < 0$.
$\Rightarrow |xy| \geq 0 \Rightarrow |xy| = xy$. Nach Definition der Betragsfunktion gilt aber auch: $|x||y| = -x(-y) = xy \Rightarrow |xy| = |x||y|$. □

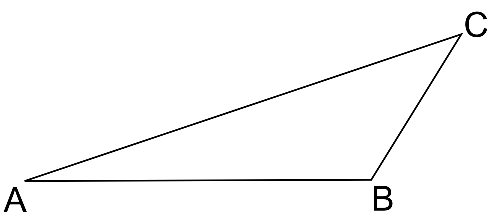
- Wir haben $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, für alle $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$.

Beweis. Es gilt $x = \frac{x}{y}y$ und somit $|x| = \left|\frac{x}{y}\right| |y|$.
$\Leftrightarrow \frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|$. □

7.2.3 Die Dreiecksungleichung

Einer der wichtigsten Ungleichungen der Mathematik ist die *Dreiecksungleichung*. Sie besagt

Satz 7.2.4 (Dreiecksungleichung)**.** Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $|x + y| \leq |x| + |y|$.



Anschaulich am Dreieck ABC: Der direkte Weg von A nach C ist immer kürzer als der Umweg über einen weiteren Punkt B nach C. Die Länge der Strecke des direkten Weges ist $|AC|$. Dieser ist stets kürzer als die Länge des Umwegs $|AB| + |BC|$.

Beweis der Dreiecksungleichung. Es gilt:

$$|x + y| = \begin{cases} x + y, & \text{falls } x + y \geq 0 \\ -(x + y), & \text{falls } x + y < 0 \end{cases}$$

Wir müssen zeigen, dass $x + y \leq |x| + |y|$ und $-(x + y) \leq |x| + |y|$ gilt.

Da $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$ folgt $x + y \leq |x| + |y|$.
Überdies gilt:
$-x \leq |x|$ und $-y \leq |y|$. Somit haben wir $-(x + y) = -x - y \leq |x| + |y|$. $\square$