Vorlesung 8

Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion

8.1 Motivation

Treffen wir eine Aussage über endlich viele Elemente einer Menge, so können wir die Gültigkeit der Aussage für jedes Element per Hand verifizieren (oder widerlegen). Bei unendlich vielen Elementen ist dieses Vorgehen nicht möglich – wir können nicht von Hand die Gültigkeit für jedes Element verifizieren.

Das Prinzip der vollständigen Induktion erlaubt es uns, die Gültigkeit einer Aussage über die natürlichen Zahlen zu verifizieren. Es besagt:

Angenommen, von der Behauptung $A(n)$ über beliebige natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ ist Folgendes bekannt:

(IA) Die Behauptung $A(n)$ gilt für ein n_0.

(IS) $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Dann gilt die Behauptung $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$.

Bemerkung.
(IA) nennen wir Induktionsanfang.

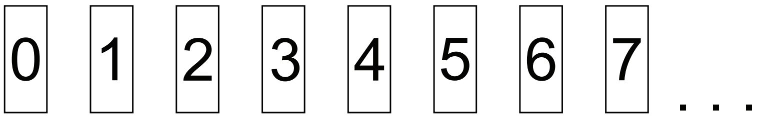
(IS) nennen wir Induktionsschluss (oder Induktionsschritt).

Es ist *sehr* wichtig, darauf zu achten, dass für das Beweisverfahren der vollständigen Induktion *stets* Induktionsanfang und Induktionsschluss benötigt werden.

Beim Induktionsschluss ist $A(n)$ die sogenannte *Induktionsvoraussetzung* (IV) und $A(n+1)$ die *Induktionsbehauptung*. Zu Induktionsvoraussetzung sagen wir auch Induktionsannahme.

8.2 Illustration

Wir machen eine Aussage A über die natürlichen Zahlen. Je nach Gültigkeit der Aussage, die wahr oder falsch sein kann, setzt ein kleines grünes Männchen eine Reihe von unendlich vielen Dominosteinen



Wenn die Aussage A für ein k richtig ist, so können wir den $(k+1)$-ten Stein umwerfen.

Wenn die Aussage falsch ist, dann nicht (Stein ist zu schwer).

Angenommen, eine Aussage B gilt für alle natürlichen Zahlen. Dann können wir den nullten Stein umwerfen (Induktionsanfang). Die Dominosteine stehen so dicht beieinander, dass, wenn der n-te Stein fällt, auch der $(n+1)$-te Stein fällt (Induktionsschluss).

Angenommen, eine Aussage C gilt nur für alle $n \geq 3$. Dann können wir nullten, ersten und zweiten Stein nicht umwerfen (direkte Überprüfung). Den dritten Stein aber schon (Induktionsanfang) und wieder stehen die Steine dicht genug beieinander (Induktionsschluss).

Angenommen, eine Aussage D gilt nur für $n = 10$ und ist falsch für alle $n \neq 10$. Dann können wir den zehnten Stein umwerfen. Es wird uns aber (in der Regel) nicht gelingen, nachzuweisen, dass die Steine dicht genug beieinander stehen.

8.3 Beispiele

(i) *Behauptung:* Für alle $n \in \mathbb{N}^+$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis: Wir führen vollständige Induktion durch.

Induktionsanfang mit $n = 1$. Für die linke Seite gilt

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1.$$

Für die rechte Seite gilt

$$\frac{1(1+1)}{2} = 1.$$

Die linke Seite stimmt mit der rechten Seite überein, also ist die Behauptung wahr für $n = 1$.

Induktionsvoraussetzung:

Wir nehmen an, die Behauptung gelte für n, also

$$A(n): \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Zu zeigen ist dann:

$$A(n+1): \qquad \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}.$$

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \\
&\overset{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+2)(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}^+$.

(ii) *Behauptung:* Für die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gilt

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$

Beweis: Induktionsanfang mit $n = 1$:
Für die linke Seite gilt

$$\sum_{k=1}^{1} (2k-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1.$$

Für die rechte Seite gilt

$$1^2 = 1.$$

Linke und rechte Seite stimmen überein, also gilt die Behauptung für $n = 1$.

Induktionsschluss:
Es gelte die Behauptung für n. Wir haben

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) &= \sum_{k=1}^{n} (2k-1) + (2(n+1)-1) \\
&\overset{\text{IV}}{=} n^2 + 2(n+1) - 1 \\
&= n^2 + 2n + 2 - 1 \\
&= n^2 + 2n + 1 \\
&= (n+1)^2.
\end{aligned}$$

(iii) Ein Beispiel dafür, dass der Induktionsanfang wichtig ist.

Behauptung: $(2n+1)$ ist eine gerade Zahl für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschluss:

Es gelte die Behauptung für ein n, d.h. $(2n+1)$ sei gerade.

Dann ist nach Induktionsvoraussetzung auch

$$2(n+1)+1 = (2n+1)+2$$

gerade.

Hier gelingt der Induktionsschluss, aber die Behauptung ist offenbar falsch! $(2n+1)$ ist stets eine ungerade Zahl.

Zum Beweisverfahren der vollständigen Induktion gehören stets Induktionsanfang und Induktionsschluss.

(iv) *Behauptung:* $n^5 - n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 5 teilbar.

Beweis: Induktionsanfang mit $n = 0$. Offenbar ist $0^5 - 0 = 0$ durch 5 teilbar. ($n \mid m$, „n teilt m", genau dann, wenn m bei Division durch n den Rest 0 lässt.)

Induktionsschluss:

Es gelte die Aussage für n, d.h. $n^5 - n$ sei durch 5 teilbar.

Wir müssen zeigen, dass $(n+1)^5 - (n+1)$ durch 5 teilbar ist (Induktionsbehauptung). Es gilt:

$$\begin{aligned}(n+1)^5 - (n+1) &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - (n+1) \\ &= \underbrace{(n^5 - n)}_{\text{durch 5 teilbar nach IV}} + \underbrace{5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)}_{\text{offenbar durch 5 teilbar}}\end{aligned}$$

(v) *Behauptung:*

$$(\forall n \in \mathbb{N})[(n \geq 10) \Rightarrow (2^n > n^3)].$$

Beweis: Induktionsanfang mit $n = 10$. Es gilt

$$2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3.$$

Also gilt die Behauptung für $n = 10$.

Angenommen, die Aussage gilt für ein $n \geq 10$, das heißt es ist

$$2^n > n^3.$$

Wir müssen zeigen, dass

$$2^{n+1} > (n+1)^3.$$

Nach IV gilt

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^3.$$

Es reicht daher zu zeigen, dass

$$2n^3 > (n+1)^3$$

ist. Dies ist äquivalent zu

$$n^3 - 3n^2 - 3n - 1 > 0.$$

Da $n \geq 10$ haben wir $n - 3 \geq 7$ und $n^2 \geq 100$. Somit haben wir

$$n^3 - 3n^2 - 3n - 1 = (n - 3)(n^2 - 3) - 10 > 0.$$

Daraus folgt die Behauptung.