Vorlesung 9

Komplexe Zahlen

Die Gleichung

$$x^2 = -1$$

ist in $\mathbb{R}$ nicht lösbar, weil es keine Zahl gibt, deren Quadrat eine negative Zahl ist. Die Mathematiker „erfanden“ zu den reellen Zahlen eine neue Zahl „i“, die die Eigenschaft hat, dass

$$i^2 = -1.$$

Der Buchstabe i wurde gewählt, weil wir es mit einer Zahl zu tun haben, die zunächst nur in unserer Vorstellung existiert und sozusagen „imaginär“ ist. i heißt imaginäre Einheit. Die Menge bestehend alleine aus $\mathbb{R}$ und der Zahl i hat noch keine wohldefinierte algebraische Struktur. Dazu müssen wir $\mathbb{R}$ und i in eine größere Menge einbetten. Es stellt sich heraus, dass diese größere Menge gerade die Menge der *komplexen Zahlen* ist.

Definition 9.0.1. Eine komplexe Zahl z ist ein geordnetes Tupel $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. x heißt Realteil von z und wird mit $\mathrm{Re}(z)$ bezeichnet (wir schreiben $x = \mathrm{Re}(z)$). $y = \mathrm{Im}(z)$ heißt Imaginärteil von z. Die Menge der komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Wir erklären nun, wie wir komplexe Zahlen addieren und multiplizieren.

Definition 9.0.2. Es seien $z = (x, y)$ und $w = (u, v)$ komplexe Zahlen. Wir setzen

$$\begin{aligned} z + w &:= (x + u, y + v) \\ z \cdot w &:= (xu - yv, xv + yu). \end{aligned}$$

Bemerkung.

- Die Addition ist einfach; wir addieren komponentenweise.
- Später werden wir sehen, dass wir die Multiplikation mit Hilfe der imaginären Einheit „herleiten“ können.
- Insbesondere gilt $(0, 1) \cdot (0, 1) = (0 - 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$.

Lemma 9.0.3. Die Addition und die Multiplikation komplexer Zahlen sind kommutativ und assoziativ. Das neutrale Element bzgl. der Addition ist $(0, 0)$ und das der Multiplikation ist $(1, 0)$. Überdies gelten die Distributivgesetze.

Wir machen folgende grundlegende Beobachtung für zwei komplexe Zahlen, deren Imaginärteil gleich Null ist:

Lemma 9.0.4. Es gilt:

$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0) \text{ und } (x, 0) \cdot (y, 0) = (x \cdot y - 0 \cdot 0, x \cdot 0 + 0 \cdot y) = (x \cdot y, 0).$$

Das bedeutet: Komplexe Zahlen, deren zweite Komponente Null ist, verhalten sich wie reelle Zahlen.
Z.B. gilt $7 + 11 = 18$ und $(7, 0) + (11, 0) = (18, 0)$. Für eine komplexe Zahl $(x, 0)$ können wir kurz x schreiben, d.h. jede reelle Zahl lässt sich als komplexe Zahl interpretieren.

Definition 9.0.5. Die komplexe Zahl $(0, 1)$ nennen wir imaginäre Einheit i, also $i = (0, 1)$. Wie oben festgestellt, gilt

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1 \in \mathbb{R}.$$

9.1 Algebraische Form einer komplexen Zahl

Mit der imaginären Einheit können wir eine neue Schreibweise für die komplexen Zahlen einführen: Wir haben

$$\begin{aligned} z = (x, y) &= (x, 0) + (y, 0) \\ &= (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) \\ &= x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Anders formuliert, anstatt der Tupelschreibweise (x, y) für die komplexe Zahl z können wir die algebraische Form $z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$ verwenden. In dieser Darstellung können wir die Multiplikation „leichter“ ausführen.
Es seien $z = x + iy$ und $w = u + iv$ komplexe Zahlen. Wir haben:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (x + iy)(u + iv) \\ &= xu + ixv + iuy + i^2 yv \\ &= xu - yv + i(xv + yu) \end{aligned}$$

Die Addition ist einfach

$$z + w = (x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$

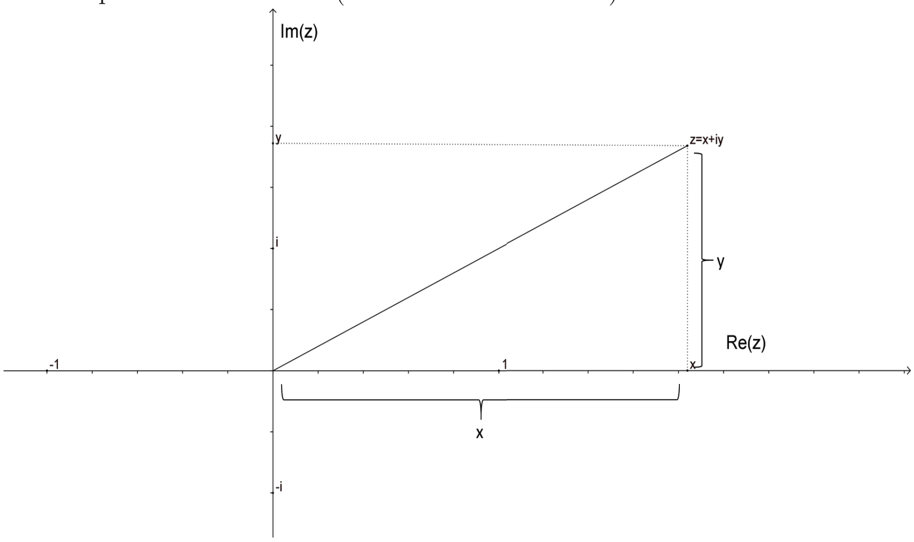
Folgende Begriffe sind wichtig:

Definition 9.1.1. Es sei $z = (x, y) \in \mathbb{C}$. Die Zahl $\overline{z} := (x, -y) = x - iy$ heißt komplex konjugierte Zahl zu z.

Definition 9.1.2. Der Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl ist ihr Abstand zum Nullpunkt. In Einklang mit Pythagoras setzen wir

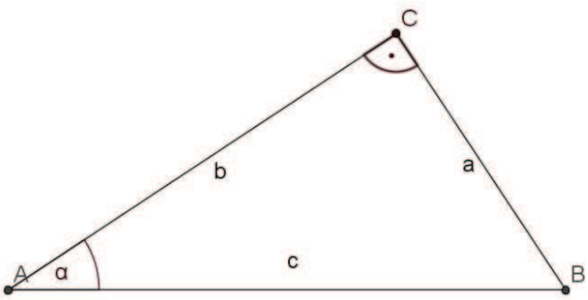
$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x + iy)(x - iy)} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}.$$

Eine reelle Zahl liegt auf der reellen Zahlengerade. Eine komplexe Zahl liegt in der komplexen Zahlenebene (Gaußsche Zahlenebene).



9.2 Polarkoordinaten einer komplexen Zahl

Eine weitere wichtige Repräsentation einer komplexen Zahl ist ihre Darstellung in Form von Polarkoordinaten. Hierzu wiederholen wir kurz die Sinus- und Kosinusfunktion elementargeometrisch am rechtwinkligen Dreieck.

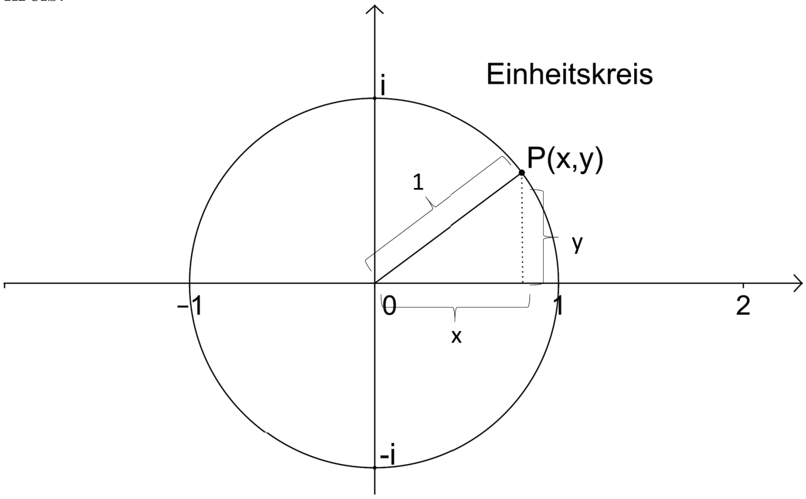


Sinus:	$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$	„Gegenkathete durch Hypothenuse“
Kosinus:	$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$	„Ankathete durch Hypothenuse“
Tangens:	$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$	„Gegenkathete durch Ankathete“

Bemerkung. In der Hochschulmathematik werden Sinus- und Kosinusfunktion über unendliche Summen (Reihen) definiert, s. A1-Vorlesung. Üblicherweise verwenden wir als Argumente in den trigonometrischen Funktionen keine Winkel, sondern die zu ihnen korrespondierenden Bogenmaße. Konkret bedeutet dies:

- $0^\circ \hat{=} 0, \qquad 360^\circ \hat{=} 2\pi \qquad$ (volle Umdrehung)
- $k^\circ \hat{=} \frac{k^\circ}{360^\circ} 2\pi$ (z.B. $180^\circ \hat{=} \frac{180^\circ}{360^\circ} 2\pi = \pi$).

Im rechtwinkligen Dreieck habe die Hypotenuse nun die Länge 1, d.h. $c = 1$. Dann gilt $\cos(\alpha) = b$ und $\sin(\alpha) = a$. Wir betrachten Punkte auf dem Einheitskreis.



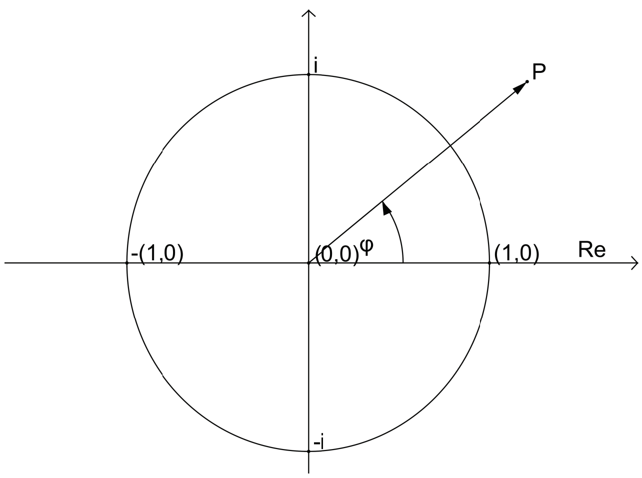
Offenbar haben wir $x = \cos(\varphi)$ und $y = \sin(\varphi)$. Eine komplexe Zahl $z = (x, y)$ auf dem Einheitkreis hat ebenso die Darstellung

$$z = (\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

mit $-\pi < \varphi \leq \pi$. Eine beliebige komplexe Zahl $z = (x, y)$ mit Betrag $r \geq 0$ lässt sich daher schreiben als

$$z = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$$

mit $r = |z|$ und $\varphi = \arg(z)$. φ wird auch *Argument* von z genannt. $r = |z|$ und $\varphi = \arg(z)$ sind die Polarkoordinaten von z. Die Angabe der Polarkoordinaten legt einen Punkt in der komplexen Zahlenebene eindeutig fest. Ausgehend vom Punkt $(1, 0)$ wird festgelegt, wie dieser um den „Pol“ (Nullpunkt) mit Bogenmaß φ gedreht und anschließend mit der Länge r gestreckt werden muss: Mit den



Reihendarstellungen der Sinus-, Kosinus- und Exponentialfunktion ergibt sich die Eulersche Formel:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi).$$

Eine komplexe Zahl z hat damit die Darstellungen

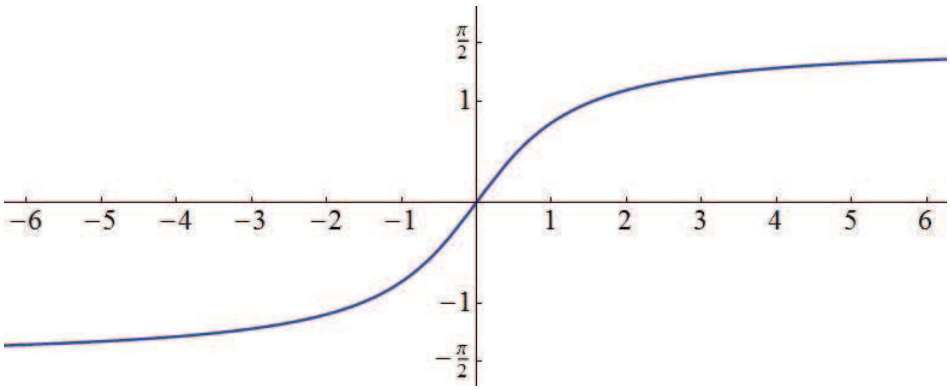
- als Tupel $z = (x, y)$
- in algebraischer Form $x + iy$
- in Form von Polarkoordinaten

  $$z = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = r \cdot e^{i\varphi}$$

  mit $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Alle Darstellungen lassen sich jeweils in eine andere überführen.
Die Umkehrfunktion der Tangens-Funktion ist der Arkustangens

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$



Wir erklären nun, wie wir für $z \in \mathbb{C}$ mit bekanntem $\mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z)$, das Argument von z bestimmen.

- Falls $\mathrm{Re}(z) = 0$ und $\mathrm{Im}(z) > 0$ ist, ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
- Falls $\mathrm{Re}(z) = 0$ und $\mathrm{Im}(z) < 0$ ist, ist $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.
- Falls $z \in \mathbb{C}$ im I. bzw. im IV. Quadranten ist, d.h. $\mathrm{Re}(z) > 0$ und $\mathrm{Im}(z) > 0$ bzw. $\mathrm{Re}(z) > 0$ und $\mathrm{Im}(z) < 0$, dann ist $\varphi = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right)$.
- Falls $z \in \mathbb{C}$ im II. Quadranten ist, d.h. $\mathrm{Re}(z) < 0$ und $\mathrm{Im}(z) > 0$, dann ist $\varphi = \pi + \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right)$.
- Falls $z \in \mathbb{C}$ im III. Quadranten ist, d.h. $\mathrm{Re}(z) < 0$ und $\mathrm{Im}(z) < 0$, dann ist $\varphi = -\pi + \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right)$.

Beispiel. Es sei $z = (1, 1)$. Dann ist $z = 1 + 1 \cdot i$. Es gilt $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ und $\varphi = \arctan(\frac{1}{1})$.

Es gilt $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, denn das vorliegende rechtwinklige Dreieck ist gleichschenklig. Somit hat z die folgende Polarkoordinatendarstellung

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$