Vorlesung 11

Reihen, Funktionen

11.1 Reihen

Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Aus ihr können wir eine neue Folge konstruieren durch

$$s_n := a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

s_n ist die *n-te Partialsumme* von a_n.

Definition 11.1.1. Die Folge s_n der n-ten Partialsumme heißt *Reihe*. Konvergiert s_n, so nennen wir

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

den Wert der Reihe.

Es ist zentrales Thema der Analysis zu untersuchen, ob eine Reihe konvergiert oder nicht.

11.1.1 Geometrische Reihen

Für $x \in \mathbb{R}$ ist eine geometrische Reihe von der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Wir haben gezeigt (Blatt 2, Aufgabe 9):

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \text{ für } x \neq 1 \quad \text{(geometrische Summe)}.$$

Mit $|x| < 1$ folgt
$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$
An dieser Stelle haben wir benutzt, dass $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ falls $|q| < 1$; einen Beweis hierfür wird in der A1-Vorlesung behandelt.

11.1.2 Die harmonische Reihe

Die harmonische Reihe ist
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$
Diese divergiert! Das ist auf dem ersten Blick nicht so offensichtlich, denn wir summieren über eine Nullfolge.
Die Divergenz sehen wir so
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots \\ &= \infty.\end{aligned}$$
Wir haben in dieser Abschätzung also benutzt, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{k}{2}.$$
Bemerkung. Geometrische Reihen und die harmonische Reihe gehören zu den wichtigsten Reihen der Analysis. Die Summation bei einer geometrischen Reihe beginnt bei $k = 0$ und bei der harmonischen Reihe bei $k = 1$.

Beispiel: Es gilt
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1. \tag{11.1}$$
Beweis. Wir haben
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$
denn
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{a(k+1)+bk}{k(k+1)} = \frac{ak+a+bk}{k(k+1)} = \frac{k(a+b)+a}{k(k+1)}$$
$\Rightarrow 1 = (a+b)k + a$. Mit Koeffizientenvergleich folgt $a + b = 0$, das heißt $a = 1$ und $b = -1$.

Somit gilt

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \text{ für } n \to \infty, \end{aligned}$$

also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

□

Zuweilen können wir die Berechnung eines Wertes einer Reihe auf bekannte Reihen zurückführen: Dafür haben wir folgenden

Satz 11.1.2. (Reihen und algebraische Operationen)
Seien $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ zwei konvergente Reihen mit Grenzwerten a und b. Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann konvertiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k)$ und zwar gegen $\lambda a + \mu b$.

Beispiel.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left(3\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{4}{(k+1)(k+2)}\right) &= 3 \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k}_{=2 \text{ (geom. Reihe)}} + 4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= 3 \cdot 2 + 4 \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}}_{=1 \text{ vgl.(11.1)}} \\ &= 6 + 4 \cdot 1 = 10. \end{aligned}$$

Vorsicht: Zu beachten ist:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \neq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Hilfreich ist das *Nullfolgenkriterium:*

Satz 11.1.3. Falls $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, so ist a_k notwendigerweise eine Nullfolge.

Beispiel: Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$ divergiert.

Beweis. $a_n := \sqrt{n}$ ist keine Nullfolge. Nach dem Nullfolgenkriterium divergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$. □

Für weitere Konvergenzkriterien: siehe A1-Vorlesung.

11.2 Funktionen

Definition 11.2.1. Es seien X und Y Mengen. Eine Funktion f von X nach Y ordnet jedem Element $x \in X$ in eindeutiger Weise ein $y \in Y$ zu.
Wir verwenden die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} f\colon X &\to Y \\ x &\mapsto f(x) = y \end{aligned}$$

Die Menge X heißt Definitionsbereich. Die Menge $f(X) := \{f(x) \in Y \mid x \in X\}$ heißt Wertebereich von f oder auch das Bild von X unter f.

Bemerkung. Nicht jedem Element $y \in Y$ muss ein $x \in X$ zugeordnet worden sein!

Definition 11.2.2. Unter dem Graphen von $f : X \to Y$ verstehen wir die Menge

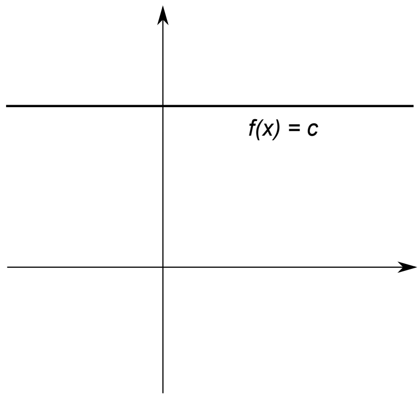
$$Graph(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y.$$

Im Folgenden beschäftigen wir uns zunächst mit reellwertigen Funktionen, das heißt $f : X \to \mathbb{R}$.

Beispiele:

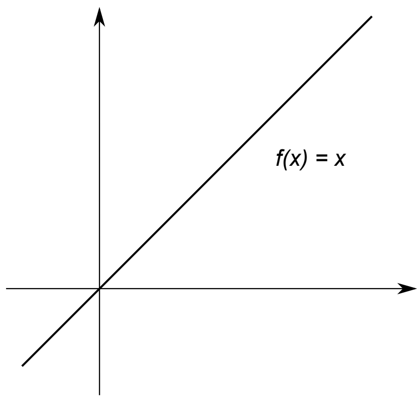
- **Konstante Funktionen**

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = c,\ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

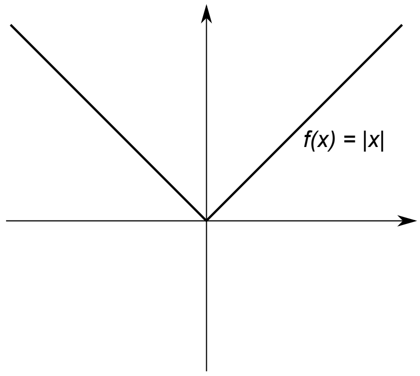


- **Identische Abbildung**

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$



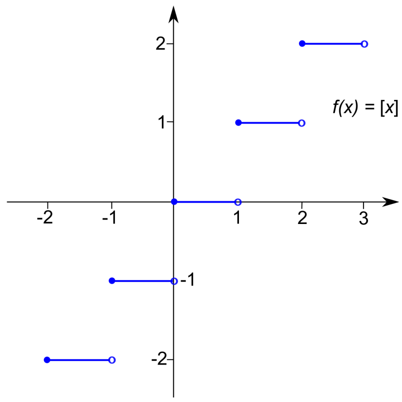
- **Absolutbetrag**



$$\begin{aligned} |\ |: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x| \end{aligned}$$

(oder alternativ: abs: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

- **Ganzzahlfunktion, auch Gauß-Klammer genannt**



$$[\ ]: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

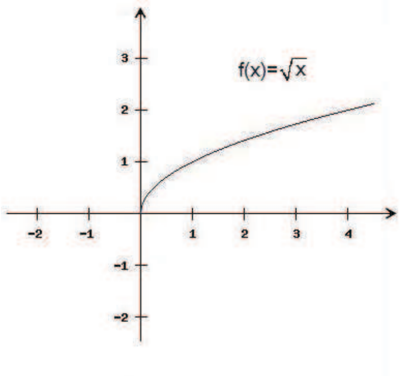
(oder alternativ: entier: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

Für $x \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $[x]$ die größte ganze Zahl $\leq x$. Das heißt $[x]$ ist diejenige ganze Zahl mit $x-1 < [x] \leq x$. Der Wertebereich von $[\ ]$ ist $\mathbb{Z}$.

Beispiel: $[1{,}5]=1$.

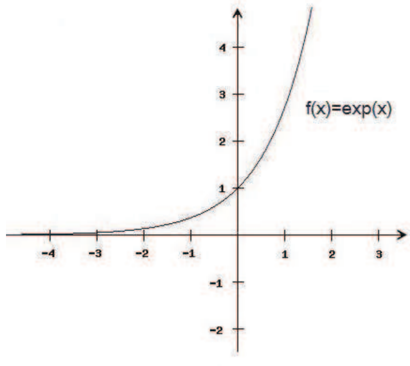
- **Quadratwurzel**

$$\begin{aligned} \mathrm{sqrt}\colon \mathbb{R}_0^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$



- **Exponentialfunktion**

$$\begin{aligned} \exp\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \exp(x)\ (= e^x) \end{aligned}$$



- **Polynomfunktionen**

$$\begin{aligned} p\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad \text{mit } a_j \in \mathbb{R},\ j = 0, 1, \ldots n \end{aligned}$$

- **Treppenfunktion**
  Seien $a < b$ reelle Zahlen. Eine Funktion

  $$\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$$

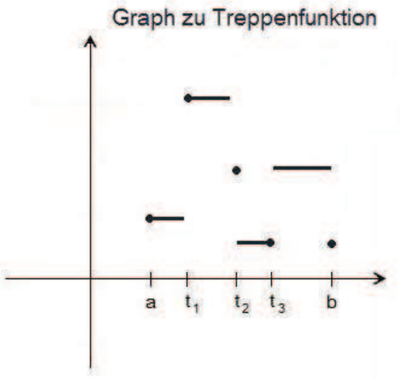
  heißt Treppenfunktion, wenn es eine Unterteilung

  $$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$$

  des Intervalls (a, b) und Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, so dass

  $$\varphi(x) = c_k$$

  für alle $x \in (t_{k-1}, t_k), 1 \leq k \leq n$. Die Funktionswerte $\varphi(t_k)$ in den Teilpunkten sind beliebig.



- Beispiel für eine Funktion, deren Graphen wir nicht zeichnen können:
  Dirichletsche Sprungfunktion

  $$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Wir können durch algebraische Operatoren aus Funktionen neue Funktionen konstruieren.

Definition 11.2.3. Seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$.
Dann sind die Funktionen

$$\begin{aligned} f + g &: X \to \mathbb{R} \\ \lambda f &: X \to \mathbb{R} \\ f \cdot g &: X \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

definiert durch

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &:= f(x) + g(x) \\ (\lambda \cdot f)(x) &:= \lambda \cdot f(x) \\ (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x). \end{aligned}$$

Sei $X' = \{x \in X |\ g(x) \neq 0\}$. Dann ist die Funktion

$$\frac{f}{g} : X' \to \mathbb{R}$$

definiert durch

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Bemerkung. Durch wiederholte Anwendung algebraischer Operationen entstehen aus $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ und der konstanten Funktion 1 alle rationalen Funktionen.

Eine weitere wichtige Konstruktionsmöglichkeit neuer Funktionen gibt die folgende Definition:

Definition 11.2.4. (Komposition von Funktionen)
Es seien $f\colon X \to \mathbb{R}$ und $g\colon Y \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(X) \subset Y$. Dann ist die Funktion

$$g \circ f\colon X \to \mathbb{R} \quad \text{(Komposition von } f \text{ mit } g\text{)}$$

definiert durch

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad \text{für } x \in X.$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & Y \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Dabei lesen wir von rechts nach links (von innen nach außen).

Beispiel: Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^2$.
Dann lässt sich $\mathrm{abs}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ schreiben als $\mathrm{abs} = \mathrm{sqrt} \circ g$, denn für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{sqrt} \circ g(x) = \mathrm{sqrt}(g(x)) = \mathrm{sqrt}(x^2) = |x| = \mathrm{abs}(x)$.