Vorlesung 12

Injektive und surjektive Funktionen

12.1 Etwas Mengenlehre

In der Folge arbeiten wir intuitiv mit Mengen. Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Elementen. Zum Beispiel ist $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ eine endliche Menge mit 5 Elementen. Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen hat unendlich viele Elemente. Die Menge $\mathbb{R}$ auch. Es stellt sich heraus, dass $\mathbb{R}$ „mächtiger“ als $\mathbb{N}$ ist.

Definition 12.1.1. Bei einer endlichen Menge A bezeichnet ihre *Mächtigkeit* die Anzahl der Elemente von A. Wir schreiben hierfür $|A|$ oder auch $\#A$.

Beispiel. Für $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ gilt $|A| = 5$. Um die Mächtigkeit für unendliche Mengen zu erklären, benötigen wir gewisse Klassen von Funktionen.

12.2 Injektive, surjektive und bijektive Funktionen

Definition 12.2.1. Es seien X und Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion. f ist *injektiv*, wenn gilt:

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Äquivalente Formulierungen sind

- $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- Jedes $y \in Y$ tritt höchstens einmal als Bild (Funktionswert) unter f auf
- Stimmen zwei Bilder überein, so müssen schon die Urbilder übereinstimmen.

Vorsicht: Injektivität bedeutet *nicht*

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

Diese Implikation gilt für alle Funktionen und ist damit *keine* Charakterisierung von Injektivität.

Bemerkung. Eine injektive Funktion f heißt Injektion. Wir „injizieren“ bzw. betten die Menge X in Y ein.

Beispiele.

- In Abbildung 12.1 ist die Funktion $f : X \to Y$ injektiv, da jedes $y \in Y$ höchstens einmal als Bild auftritt.

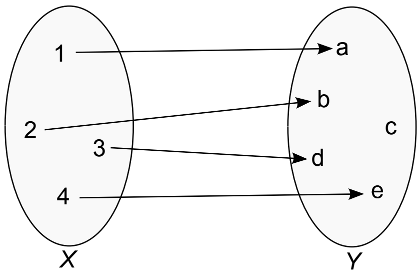

Abbildung 12.1: Injektive Funktion f

- In Abbildung 12.2 ist die Funktion $f : X \to Y$ nicht injektiv, da das Element $a \in Y$ zweimal getroffen wird.

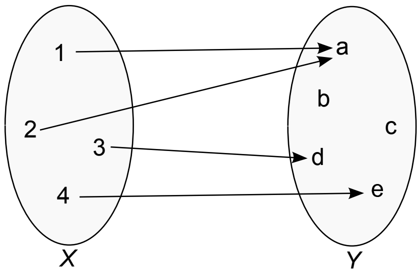

Abbildung 12.2: Nicht injektive Funktion f

Es seien X und Y endliche Mengen. Damit eine injektive Funktion $f : X \to Y$ existieren kann, darf X höchstens so viele Elemente haben wir Y, d.h.

$$|X| \leq |Y|.$$

Würde $|X| > |Y|$ gelten, so hätten mindestens zwei Elemente $x_1, x_2 \in X$ und $x_1 \neq x_2$ das gleiche Bild, d.h. $f(x_1) = f(x_2)$.

Weitere Beispiele.

(i)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned}$$

ist injektiv, denn

$$f(n_1) = f(n_2) \;\Rightarrow\; 2n_1 = 2n_2 \;\Rightarrow\; n_1 = n_2.$$

(ii) Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

ist nicht injektiv, denn $f(2) = f(-2)$, aber $2 \neq -2$ (siehe Abbildung 12.3).

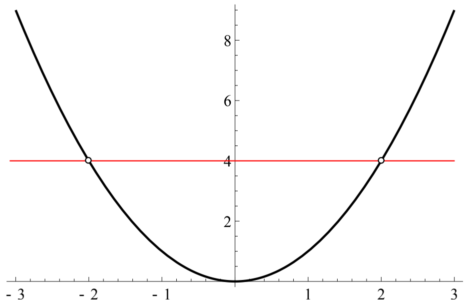

Abbildung 12.3: Normalparabel

Definition 12.2.2. Es seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion. f heißt *surjektiv*, wenn gilt:

$$\forall y \in Y \; \exists x \in X : f(x) = y.$$

Äquivalente Formulierung: f ist surjektiv, wenn jedes Element $y \in Y$ unter der Abbildung f mindestens einmal getroffen wird.

Beispiele.

- In Abbildung 12.4 ist die Funktion $f : X \to Y$ surjektiv, da jedes $y \in Y$ mindestens einmal getroffen wird.

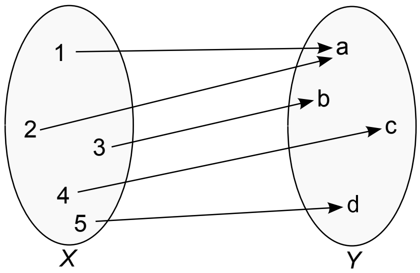

Abbildung 12.4: Surjektive Funktion f

- In Abbildung 12.4 ist die Funktion $f : X \to Y$ nicht surjektiv, da das Element $c \in Y$ nicht im Bild von f ist.

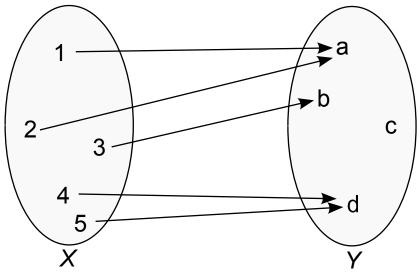

Abbildung 12.5: Nicht surjektive Funktion f

Es seien X, Y Mengen. Damit eine surjektive Abbildung $f : X \to Y$ existieren kann, muss X mindestens genauso viele Elemente haben wir Y, d.h. $|X| \geq |Y|$. Würde $|X| < |Y|$ gelten, so gibt es ein $y \in Y$, das nicht als Bild unter f auftritt.

Beispiele.

(i) Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned}$$

ist injektiv. f ist nicht surjektiv, denn für $y = 3 \in \mathbb{N}$ existiert kein $n \in \mathbb{N}$, so dass $f(n) = 3$.

(ii) Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x + 1 \end{aligned}$$

ist surjektiv (siehe Abbildung 12.6). Sei $y \in Y$ vorgegeben. Gesucht ist $x \in X$, so dass $f(x) = y$. Nebenrechnung: Wir haben $2x + 1 = y \Rightarrow 2x = y - 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$. Sei $y \in Y$. Wir setzen $x := \frac{y-1}{2}$. Dann gilt

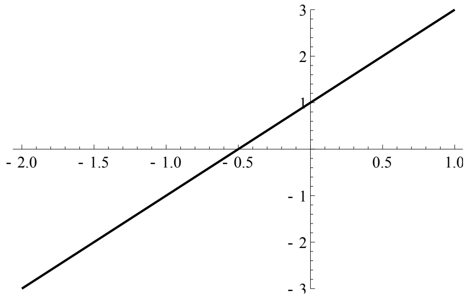

Abbildung 12.6: Gerade $f(x) = 2x + 1$

$f(x) = f(\frac{y-1}{2}) = 2(\frac{y-1}{2}) + 1 = y$. Somit gibt es zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$.

Definition 12.2.3. Es seien X und Y Mengen. Eine Funktion $f : X \to Y$ ist *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist. D.h. für jedes $y \in Y$ gibt es *genau ein* $x \in X$ mit $f(x) = y$.

Beispiel. In Abbildung 12.7 ist die Funktion $f : X \to Y$ bijektiv.

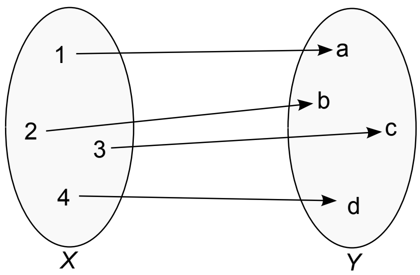

Abbildung 12.7: Bijektive Funktion f

Beispiel. Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + 1 \end{aligned}$$

ist injektiv: Es gelte $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$
f ist surjektiv: Für $y \in Y$ wählen wir $x = y - 1$. Dann gilt $f(x) = f(y - 1) = (y - 1) + 1 = y$. Also ist f bijektiv.

Bemerkung. Bei den Begriffen Injektivität, Surjektivität und Bijektivität einer Funktion $f : X \to Y$ kommt es entscheidend auf den Definitionsbereich X und die Zielmenge Y an.

Beispiel.

(i) Die Funktion

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

ist nicht injektiv (siehe Abbildung 12.8), zum Beispiel gilt $f_1(2) = f_1(-2)$ aber $2 \neq -2$. f_1 ist nicht surjektiv, denn es gibt kein x mit $f_1(x) = -1 \in \mathbb{R}$.

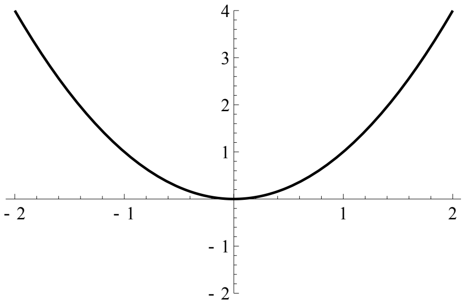

Abbildung 12.8: Funktion $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2$

(ii) Die Funktion

$$\begin{aligned} f_2 :& \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x^2 \end{aligned}$$

ist injektiv (im Vergleich zu f_1 ist der Definitionsbereich eingeschränkt), denn $f_2(x_1) = f_2(x_2) \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0$ (siehe Abbildung 12.9). Dies ist äquivaltent zu $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$. Falls $x_1 \neq 0$ und $x_2 \neq 0$ folgt $x_1 - x_2 = 0$, d.h. $x_1 = x_2$. Falls $x_1 = 0$, so ist $-x_2^2 = 0$, also auch $x_2 = 0$, d.h. $x_1 = x_2$. Somit ist f_2 injektiv.
f_2 ist nicht surjektiv, wieder gibt es kein $x \in \mathbb{R}_0^+$ mit $f_2(x) = -1$.

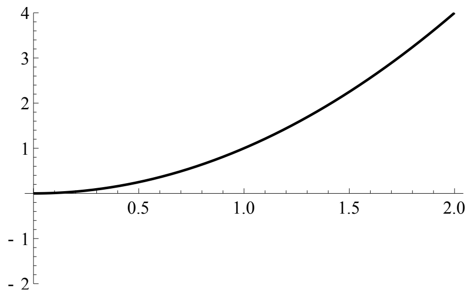

Abbildung 12.9: Funktion $f_2 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2$

(iii) Die Funktion

$$\begin{aligned} f_3 :& \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \\ & x \mapsto x^2 \end{aligned}$$

ist nicht injektiv (siehe Abbildung 12.10). f_3 ist surjektiv, denn für alle $y \in \mathbb{R}_0^+$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f_3(x) = y$.

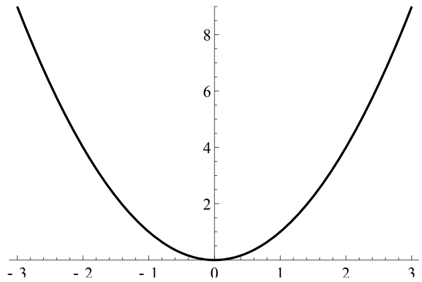

Abbildung 12.10: Funktion $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ mit $x \mapsto x^2$

(iv) Die Funktion

$$\begin{aligned} f_4 : &\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \\ &x \mapsto x^2 \end{aligned}$$

ist injektiv und surjektiv, und damit bijektiv (siehe Abbildung 12.11).

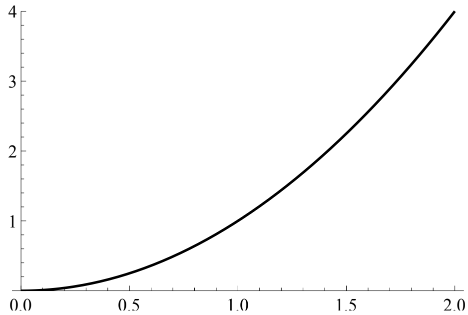

Abbildung 12.11: Funktion $f_4 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ mit $x \mapsto x^2$

Es seien X und Y endliche Mengen. Wir haben gesehen:

- $|X| \leq |Y| \iff$ Es existiert eine injektive Abbildung $f : X \to Y$.
  „X ist weniger mächtig als Y oder gleichmächtig zu Y."
- $|X| \geq |Y| \iff$ Es existiert eine surjektive Abbildung $f : X \to Y$.
  „X ist mächtiger als Y oder gleichmächtig zu Y."
- $|X| = |Y| \iff$ Es existiert eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$.
  „X ist genauso mächtig wie Y."

Wir können diese Sprechweise übertragen auf die unendliche Menge $\mathbb{N}$.

Definition 12.2.4. Eine Menge M heißt *gleichmächtig zu* $\mathbb{N}$, wenn es eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to M$ gibt. M heißt dann *abzählbar (unendlich)*.

Zum Beispiel ist die Menge $M = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, ...\}$ der geraden Zahlen gleichmächtig zu $\mathbb{N}$. Obwohl M eine *echte* Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist, haben beide „gleich

viele“ Elemente. Dies ist bei endlichen Mengen nicht möglich! Eine echte Teilmenge kann nicht gleichmächtig (d.h. genauso viele Elemente haben) wie ihre Obermenge. Wir weisen nun nach, dass $|M| = |\mathbb{N}|$.
Wir definieren

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to M \\ n &\mapsto 2n. \end{aligned}$$

Dann ist f bijektiv, denn f ist injektiv:

$$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow 2n_1 = 2n_2 \Rightarrow n_1 = n_2.$$

f ist surjektiv: Sei $y = 2n$. Wähle $x = n$. Dann gilt $f(n) = 2n = y$.

Illustration (siehe Abbildung 12.12): Die natürlichen Zahlen haben einen Bezeichner. Mit der Bijektion f „kleben“ wir andere Bezeichnungen auf, so wird aus „0“ eine neue „0“, aus „1“ wird „2“, aus „2“ wird „4“, usw.

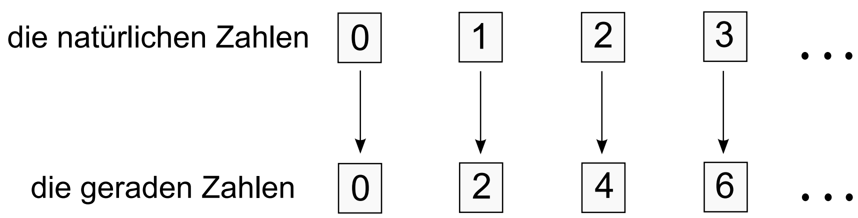

Abbildung 12.12: Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und M