Vorlesung 15

Differentialrechnung

Ein immer wiederkehrendes Konzept in der Mathematik ist die Zurückführung auf Bekanntes, beziehungsweise auf besonders „einfache“ Fälle. Besonders „einfach“ sind lineare Funktionen in der Analysis. In der Differentialrechung führen wir Linearisierungen durch, das heißt nichtlineare Funktionen werden durch lineare Funktionen approximiert.

15.1 Geradengleichung

Gegeben seien zwei Punkte $A(x_a|y_a)$ und $B(x_b|y_b)$. Diese legen eine Gerade $g = g_{AB}$ eindeutig fest.

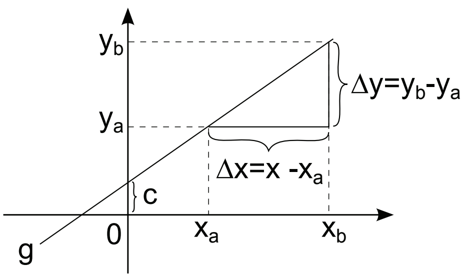

Abbildung 15.1: Geradensteigung und Differenzenquotient

Die allgemeine Geradengleichung lautet:

$$g: \qquad y = mx + c$$

Dabei bezeichnet $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ die Steigung und c den $y-$Achsenabschnitt. Die Steigung (siehe Abbildung 15.1)

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{y_a - y_b}{x_a - x_b}$$

wird auch Differenzenquotient genannt. Dabei steht Δ für „Differenz“. Fassen wir $f(x)$ als eine Funktion der Zeit x auf, so ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

die mittlere Änderungsrate („Durchschnittsgeschwindigkeit") der zeitabhängigen Funktionswerte zwischen zwei Zeitpunkten x_1 und x_2 (siehe Abbildung 15.2).

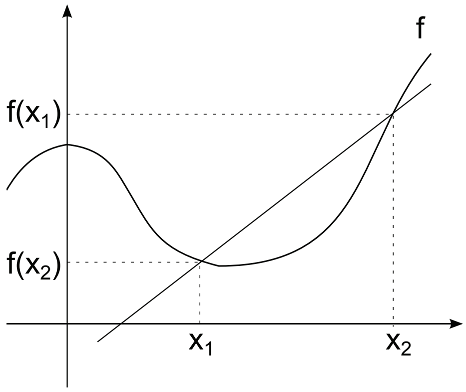

Abbildung 15.2: Mittlere Änderungsrate der Funktion f

Was passiert nun, für $\Delta x \to 0$? Anders formuliert, wie ist die Änderungsrate wenn x_2 mit x_1 zusammenfällt?

Wir sprechen in diesem Fall von der momentanen Änderungsrate („Momentangeschwindigkeit") im Punkt x_1, wenn

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

existiert. Die momentane Änderungsrate im Punkt $A(a|f(a))$ entspricht genau der Tangentensteigung der Tangente am Punkt A.

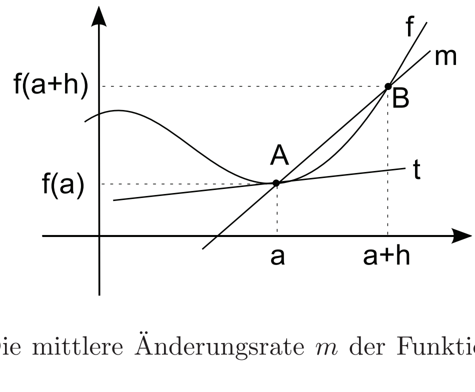

Abbildung 15.3: Die mittlere Änderungsrate m der Funktion f wird zur Tangente t für $h \to 0$

Für $h \to 0$ wandert der Punkt $B(a + h|f(a + h))$ auf den Punkt $A(a|f(a))$ zu (vgl. Abbildung 15.3).

15.2 Differenzierbarkeit

Definition 15.2.1. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar* in $a \in D$, falls

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

existiert. Dieser Grenzwert wird Differentialquotient genannt. Wir setzen dann

$$f'(a) := \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

und nennen $f'(a)$ die erste Ableitung von f im Punkt a. Wir sagen f ist *differenzierbar*, wenn sie für jeden Punkt des Definitionsbereiches differenzierbar ist. Die Funktion $f' : x \mapsto f'(x)$ heißt Ableitungsfunktion bzw. erste Ableitung von f.

Beispiele

- $f\colon D \to \mathbb{R}, f(x) = x$.
  Die Funktion $f(x) = x$ ist differenzierbar und es gilt $f'(x) = 1$.

  Beweis. Sei $x \in D$. Es gilt

  $$\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)-x}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

  Daraus folgt nun

  $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1 = f'(x).$$

  □

- $g\colon D \to \mathbb{R}, g(x) = x^2$.
  Die Funktion g ist differenzierbar und es gilt $g'(x) = 2x$.

  Beweis. Sei $x \in D$. Es gilt

  $$\begin{aligned}\frac{g(x+h)-g(x)}{(x+h)-x} &= \frac{(x+h)^2-x^2}{h}\\ &= \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \frac{2hx+h^2}{h} = 2x+h.\end{aligned}$$

  Damit folgt:

  $$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x = g'(x).$$

  □

- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$.
  Die Funktion f ist differenzierbar mit $f'(x) = nx^{n-1}$.

Beweis. Es gilt $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$. Nach dem Binomischen Lehrsatz (vgl. Vorlesung 13) gilt:

$$\begin{aligned}
(x+h)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k \\
&= \binom{n}{0} x^n h^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k \\
&= x^n + n x^{n-1} h + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k
\end{aligned}$$

Daher haben wir

$$\begin{aligned}
\frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \frac{x^n + n x^{n-1} h + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n}{h} \\
&= n x^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} \\
&\longrightarrow \quad n x^{n-1} \quad (\text{für } h \to 0).
\end{aligned}$$

Also gilt $f'(x) = n x^{n-1}$. □

Bemerkung. Für $x > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt für $f(x) = x^a$, dass $f'(x) = a x^{a-1}$. Einen Beweis sehen Sie in der A1-Vorlesung. Im obigen Beispiel ist $a \in \mathbb{N}$.

Satz 15.2.2. Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in $a \in D$ differenzierbar, wenn gilt

$$\lim_{h \to 0,\, h>0} \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \lim_{h \to 0,\, h<0} \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a}.$$

Beispiel. Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ ist differenzierbar für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und nicht differenzierbar an der Stelle $x = 0$. Es gilt:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Für $x \neq 0$ ist klar, dass f differenzierbar ist. Wir haben

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0,\, h>0} \frac{f(0+h) - f(0)}{0+h-0} &= \lim_{h \to 0,\, h>0} \frac{h}{h} = 1 \\
\lim_{h \to 0,\, h<0} \frac{f(0+h) - f(0)}{0+h-0} &= \lim_{h \to 0,\, h<0} \frac{-h}{h} = -1
\end{aligned}$$

Also folgt die Behauptung, da

$$\lim_{h \to 0,\, h>0} \frac{f(0+h) - f(0)}{0+h-0} \neq \lim_{h \to 0,\, h<0} \frac{f(0+h) - f(0)}{0+h-0}.$$

15.3 Ableitungsregeln

Satz 15.3.1. Es seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $f+g, f \cdot g, \lambda f$ und im Falle $g(x) \neq 0$ auch $\frac{f}{g}$ differenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x) && \text{(Summenregel)}\\
(fg)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) && \text{(Produktregel)}\\
(\lambda f)'(x) &= \lambda f'(x) &&\\
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} && \text{(Quotientenregel).}
\end{aligned}$$

Darüberhinaus gilt:

$$(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad \text{(Kettenregel)}$$

wobei $f\colon D \to \mathbb{R}, g\colon E \to \mathbb{R}$ mit $g(E) \subset D$.

Beweis. (Summenregel) Nach Definition des Differentialquotienten gilt

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h}\\
&\overset{GWS}{=} \lim_{h\to 0} \frac{(f)(x+h) - (f)(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{(g)(x+h) - (g)(x)}{h}\\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

GWS bezeichnet an dieser Stelle die Grenzwertsätze (Satz 10.1.5). Die restlichen Ableitungsregeln können als Übung bewiesen werden (siehe z.B. Übungsaufgabe 67, Blatt 14). □

Beispiele.

(i) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$, dann ist die Ableitung $f'(x) = 3x^2 - 4x + 2$

(ii) $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2 + 1$.

- $h(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$. Nach der Kettenregel ergibt sich für die Ableitung von h: $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x$.
- Definiere nun $k(x) = g(f(x)) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$. Daraus folgt sofort $k'(x) = 1$. Zur Übung wenden wir die Kettenregel an und erhalten natürlich das gleiche Resultat – wir haben $k'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 1$.

Definition 15.3.2. Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, f hat in $x \in (a,b)$ ein *lokales Maximum* (*Minimum*), wenn es eine Umgebung $U_\varepsilon(x)$ gibt, mit

$$\begin{gathered}
f(x) \geq f(\xi) \text{ für alle } \xi \in U_\varepsilon(x)\\
(f(x) \leq f(\xi) \text{ für alle } \xi \in U_\varepsilon(x)).
\end{gathered}$$

Falls das Gleichheitszeichen nur für $x = \xi$ gilt, so nennen wir x ein *isoliertes Maximum* (Minimum). Der Oberbegriff für Maximum und Minimum ist *Extremum.* Anstelle vom lokalen Extremum sprechen wir auch vom *relativen* Extremum.

Ein notwendiges Kriterium für ein Extremum liefert der folgende Satz:

Satz 15.3.3. Die Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ besitze im Punkt $x \in (a,b)$ ein lokales Extremum und sei in x differenzierbar. Dann gilt: $f'(x) = 0$.

Beweis. Siehe Übungsaufgabe 68, Blatt 14.

Folgerung. Falls $f'(a) \neq 0$ so kann a kein Extremum sein.