Vorlesung 17

Infinitesimalrechnung

17.1 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wir verknüpfen nun Differential- mit Integralrechnung.

Definition 17.1.1. Eine differenzierbare Funktion $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion einer Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, falls $F' = f$.

Der folgende Satz ist grundlegend:

Satz 17.1.2. (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Teil 1: Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a \in I$. Dann ist für alle $x \in I$ die Integralfunktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

differenzierbar und eine Stammfunktion von f.
Teil 2: Überdies gilt für alle $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Bemerkung. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI) ist eines der Hauptresultate der A1-Vorlesung. Ein Beweis würde den Rahmen des Vorkurses sprengen.
Teil 1 des HDI bedeutet die Existenz von Stammfunktionen und stellt den Zusammenhang zwischen Ableitung und Integral her.
Teil 2 erklärt, wie Integrale berechnet werden können.

Beispiele.

- Für $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ ist $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ eine Stammfunktion zu $f(x)$, denn $F'(x) = f(x)$.

- Für die trigometrischen Funktionen gilt

$$\sin'(x) = \cos(x)$$
$$\cos'(x) = -\sin(x).$$

Demnach gilt

$$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$$

ist eine Stammfunktion von $\sin(x)$ und

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$$

eine Stammfunktion von $\cos(x)$.
Hier bezeichnet c eine Konstante. Stammfunktionen unterscheiden sich nur in einer Konstanten. Der Beweis folgt in der A1-Vorlesung, benutzt wird dabei die Reihendarstellung der Sinus- und Kosinusfunktion.

- Es gilt

$$\int e^x dx = e^x + c.$$

Bemerkung. (Notation)
Es sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und F die Stammfunktion von f. Nachdem HDI gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Wir schreiben hierfür auch

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(x) \mid_a^b .$$

17.2 Partielle Integration

Vorsicht:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \neq \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx.$$

Stattdessen gilt der folgende Satz.

Satz 17.2.1. (Partielle Integration)
Es seien $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) \mid_a^b - \int_a^b g(x) \cdot f'(x)dx$$

Kurzschreibweise: $\int f \cdot dg = f \cdot g - \int g \cdot df$

Beweis. Wir setzen $F(x) = f(x) \cdot g(x)$. Dann gilt nach der Produktregel der Differentiation $F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Aufgrund der Linearität des Integrals gilt

$$\int_a^b F'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Nach dem HDI gilt

$$\int_a^b F'(x)dx = F(x) \mid_a^b = f(x)g(x) \mid_a^b$$

Daraus folgt

$$f(x)g(x) \mid_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

und sofort die Behauptung. $\square$

Definition 17.2.2. Eine Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig differenzierbar, wenn sie differenzierbar ist und ihre Ableitung f' stetig ist.

Beispiele. Gesucht ist eine Stammfunktion von $x \cdot \sin(x)$. Nach dem HDI ist $\int_a^x t \cdot \sin(t)dt$ eine Stammfunktion. Wir wenden partielle Integration an:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\begin{aligned}
\int_a^x \underbrace{t}_{=:f(t)} \cdot \underbrace{\sin(t)}_{=:g'(t)} dt &\overset{\substack{\text{partielle} \\ \text{Integration}}}{=} t \cdot (-\cos(t)) \mid_a^x - \int_a^x 1(-\cos(t))dt \\
&= -t \cdot \cos(t) \mid_a^x + \int_a^x \cos(t)dt \\
&= -x \cdot \cos(x) + a \cdot \cos(a) + \sin(t) \mid_a^x \\
&= -x \cdot \cos(x) + a \cdot \cos(a) + \sin(x) - \sin(a)
\end{aligned}$$

Somit ist $-x \cdot \cos(x) + \sin(x)$ eine Stammfunktion von $x \cdot \sin(x)$.

17.3 Substitutionsregel

Zur Bestimmung des Integrals bzw. einer Stammfunktion von verketteten Funktionen benutzen wir den folgenden Satz.

Satz 17.3.1. (Substitutionsregel)
Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $g([a, b]) \subset I$. Dann gilt

$$\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$$

Beweis. Sei $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Für $F \circ g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt nach der Kettenregel

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$$

Mit dem HDI gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)dt &= (F \circ g)(t) \mid_a^b \\ &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx.\end{aligned}$$

□

Beispiel. Zu bestimmen ist $\int_0^2 x \cdot \sin(x^2+1)dx$. Wir setzen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = x^2 + 1$. Daraus folgt $f(g(x)) = \sin(x^2+1)$ und $g'(x) = 2x$. Nun gilt

$$\begin{aligned}\int_0^2 x \cdot \sin(x^2+1)dx &= \frac{1}{2}\int_0^2 2x \cdot \sin(x^2+1)dx \\ &\overset{\text{Substitution}}{=} \frac{1}{2}\int_{g(0)}^{g(2)} f(u)du \\ &= \frac{1}{2}\int_{0^2+1}^{2^2+1} \sin(u)du \\ &= \frac{1}{2}[-\cos(u)]_1^5 \\ &= \frac{1}{2}(\cos(1) - \cos(5)).\end{aligned}$$

17.4 Exponential- und Logarithmusfunktion

Definition 17.4.1. Sei $1 \neq a > 0$. Dann heißt $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $x \longmapsto a^x$ eine Exponentialfunktion mit Basis a. Falls $a = e$, wobei e die Eulersche Zahl bezeichnet, so sprechen wir von *der* Exponentialfunktion. Für e^x schreiben wir auch $\exp(x)$.

Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ besitzt eine Reihendarstellung

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Diese Reihe konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$. Nach einem Satz aus der Analysis dürfen wir gliedweise differenzieren, das heißt

$$\frac{d}{dx}\exp(x) = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x).$$

Dabei bedeutet $\frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$. Somit gilt $(\exp(x))' = \exp(x)$, also ist die Exponentialfunktion ihre eigene Ableitung.

Satz 17.4.2 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion)**.** Es gilt

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Satz 17.4.3. Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}^+$ ab. ($\mathbb{R}^+$ bedeutet ohne 0)

Die Umkehrfunktion $\ln : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend und heißt natürlicher Logarithmus.
Es gilt die Funktionalgleichung

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Es gilt

$$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x} \text{ für } x \in \mathbb{R}^+.$$