Wiederholung Vorlesungen 1 bis 8

Aufgabe 1

(a) Sind die im Folgenden gegebenen Ausdrücke als Folge interpretierbar? Wenn ja, wie?

(i) $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots,$

(ii) $\ldots - 5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots,$

(iii) $3, 10, \pi, 42, \frac{1}{7}, 10, 12, 14, 16, 18, \ldots$

(b) Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit den Anfangswerten $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots$. Geben Sie eine explizite Darstellung für (a_n) an.

(c) Eine Folge sei definiert über die Darstellung $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ mit $a_1 = 0$ und $a_2 = 1$. Geben Sie die ersten 10 Folgenglieder an.

Lösung.

(a) (i) Interpretierbar als Folge der Potenzen der 2, explizit: $(a_n)_{n\geq 0} = 2^n$

(ii) So nicht als Folge interpretierbar. Eine Folge ist eine Abbildung von den natürlichen Zahlen in eine beliebige Menge. Demnach muss jede Folge einen Anfang haben. Man könnte jedoch umsortieren zu $1, -1, 3, -3, 5, -5, \ldots,$ welches als Folge interpretierbar ist. Eine explizite Darstellung wäre dann:

$$a_n = \begin{cases} n+1 & \text{für} \quad n = 2k, \quad k \in \mathbb{N} \\ -n & \text{für} \quad n = 2k+1, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(iii) Interpretierbar als Folge mit den gegebenen Anfangsgliedern, welche ab dem Index $n = 5$ jeweils das Doppelte des Folgenindex annimmt. Eine explizite Darstellung ist:

$$a_n = \begin{cases} 3 & \text{für} \quad n = 0 \\ 10 & \text{für} \quad n = 1 \\ \pi & \text{für} \quad n = 2 \\ 42 & \text{für} \quad n = 3 \\ \frac{1}{7} & \text{für} \quad n = 4 \\ 2n & \text{für} \quad n \geq 5 \end{cases}.$$

(b) Eine explizite Darstellung von (a_n), welche zu den gegebenen Anfangswerten passt, ist:

$$a_n = \sin\left(\frac{n}{2}\pi\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Eine andere Darstellung ist

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad n = 2k, \quad k \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{für} \quad 4 \not| n+1 \\ -1 & \text{für} \quad 4 | n+1 \end{cases} .$$

(c) Die ersten zehn Folgenglieder lauten:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

Es handelt sich hierbei um die sogenannte *Fibonacci*–Folge.

Aufgabe 2
Zeigen Sie

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} (\lambda \cdot a_k) = \lambda \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \right)$, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ und

(c) berechnen Sie $\sum\limits_{j=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=2}^{m} \left(2j + \frac{1}{2} i\right) \right)$.

Lösung.

(a)

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + \ldots (a_n + b_n) = (a_1 + \ldots + a_n) + (b_1 + \ldots + b_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Die Aussage folgt aus dem Kommutativ– und Assoziativgesetz.

(b)

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda \cdot a_k) = \lambda a_1 + \ldots + \lambda a_k = \lambda \cdot (a_1 + \ldots + a_k) = \lambda \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)$$

Die Aussage folgt aus dem Distributivgesetz.

(c)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=2}^{m}\left(2j+\frac{1}{2}i\right)\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(2\sum_{i=2}^{m}j+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{m}i\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\left(2j\sum_{i=2}^{m}1\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(-1+\sum_{i=1}^{m}i\right)\right)\\
&=\sum_{j=1}^{n}\left(2j(m-1)+\frac{1}{2}\left(\frac{m(m+1)}{2}-1\right)\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(2j(m-1)+\frac{1}{4}m(m+1)-\frac{1}{2}\right)\\
&=\sum_{j=1}^{n}2j(m-1)+\frac{1}{4}m(m+1)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}1\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}1\right)\\
&=2(m-1)\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{4}m(m+1)n-\frac{n}{2}=n(n+1)(m-1)+\frac{1}{4}nm(m+1)-\frac{n}{2}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3
Prüfen Sie, ob $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ein Körper ist.

Lösung.
Zu den notwendigen Eigenschaften eines Körpers gehört auch, dass jedes Element außer der Null ein multiplikativ Inverses besitzt.
Angenommen, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ist ein Körper.
Dann gilt $\forall x \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}-\{0\} : \exists y \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}-\{0\} : x \cdot y = 1$.
Da $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}-\{0\}$ nur fünf Elemente enthält, können wir dies leicht nachprüfen:
Wir sehen sofort: $[1]\cdot[1]=[1]$, also hat die Eins ein inverses Element, nämlich sich selbst. (Dies gilt für jedes neutrale Element!)
Für die $[2]$ jedoch können wir prüfen: $[2]\cdot[2]=[4], [2]\cdot[3]=[6]=[0], [2]\cdot[4]=[8]=[2], [2]\cdot[5]=[10]=[4]$. Die $[2]$ hat demnach kein neutrales Element. Widerspruch!
(Auch die anderen Elemente haben kein Inverses. Es genügt jedoch bereits, ein einziges Gegenbeispiel anzugeben.)
Also ist $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ kein Körper.

Aufgabe 4
Zeigen Sie: Zerlegt man eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ in zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ derart, dass b die letzten beiden Ziffern von n darstellt und a die vorderen Ziffern von n, dann gilt:

$$7|n \Leftrightarrow 7|(2a+b).$$

Lösung. Zerlegt man eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ in der angegebenen Weise, so gilt $n = 100a + b$. Wir können umformen zu $n = 100a + b = 98a + (2a + b)$. Es ist $98 = 7 \cdot 14$, also teilt 7 den ersten Summanden. Demnach ist die ganze Summe genau dann durch 7 teilbar, wenn auch der zweite Summand $2a + b$ durch 7 teilbar ist. Dies war zu zeigen.

Aufgabe 5
Es sei

$$\frac{k^2+k-2kn+2n}{2k^2n+2kn}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+\beta}+\frac{C}{\gamma n}. \tag{1}$$

Finden Sie Konstanten A, B, C, β und γ, die die obige Gleichung erfüllen.
Lösung.
Wir klammern zunächst im Nenner aus:

$$\frac{k^2+k-2kn+2n}{2k^2n+2kn}=\frac{k^2+k-2kn+2n}{2nk(k+1)}.$$

Wir führen eine Partialbruchzerlegung durch und setzen dazu $\beta = 1, \gamma = 2$.
Nun erweitern wir die Brüche auf der rechten Seite der Gleichung (1) so, dass wir auf einen Bruchstrich schreiben können. Anschließend sortieren wir die Terme im Zähler um:

$$\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}+\frac{C}{2n}=\frac{2A(k+1)n+2Bkn+Ck(k+1)}{2nk(k+1)}=\frac{kn(2A+2B)+2nA+C(k^2+k)}{2k^2n+2kn}$$

Nun vergleichen wir den Zähler mit der linken Seite der Gleichung (1) und stellen durch Koeffizientenvergleich fest:

$$2A+2B=-2, \quad A=1, \quad C=1,$$

also $B=-2$. Damit haben wir

$$\frac{k^2+k-2kn+2n}{2k^2n+2kn}=\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{2n}.$$

Aufgabe 6
Zeigen Sie: Man kann jeden glatten Betrag größer als 7 so mit Geldscheinen im Wert von 3 und 5 bezahlen, dass man kein Wechselgeld erhält.

Lösung. Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 8$ der "glatte Betrag". Wir beweisen per Induktion über n.
Induktionsanfang: Wir wollen im folgenden mit nicht nur einem, sondern drei Bedinungen starten:

- Für $n = 8$ gilt: $n = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 5$,
- für $n = 9$ gilt: $n = 3 \cdot 3 + 0 \cdot 5$ und
- für $n = 10$ gilt: $n = 0 \cdot 3 + 2 \cdot 5$.

Induktionsschritt: Angenommen, drei aufeinanderfolgende Zahlen $n, n+1, n+2, n \in \mathbb{N}$ haben eine Darstellung $n+i = a_i \cdot 3 + b_i \cdot 5, i \in \{0,1,2\}, a_i, b_i \in \mathbb{N}$.

Wir müssen jetzt zeigen: Auch die drei aufeinanderfolgenden Zahlen $n+1, n+2, n+3$ haben eine solche Darstellung.
Die Darstellung für $n+1$ und $n+2$ ist nach Induktionsannahme bereits gegeben. Betrachten wir den Fall $n+3$:

$$n + 3 = (a_0 \cdot 3 + b_0 \cdot 5) + 3 = (a_0 + 1) \cdot 3 + b_0 \cdot 5$$

Definieren wir $a_3 := a_0 + 1$ und $b_3 := b_0$ gilt $n + 3 = a_3 \cdot 3 + b_3 \cdot 5, a_3, b_3 \in \mathbb{N}$. Somit haben wir die geforderte Darstellung für $n + 3$ gefunden und der Induktionsschritt ist vollzogen.

Aufgabe 7
Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ -i & 2 \end{pmatrix}, \quad C = (-1, 1, 0, 2), \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, falls möglich, die folgenden Ausdrücke: AB, BA, AC, AD, CD, DC.
Lösung.

- $AB = \begin{pmatrix} 1-i & 3+i \\ 1-2i & 5+i \\ 1-3i & 7+i \\ 1-4i & 9+i \end{pmatrix}$
- Die Ausdrücke BA, AC, AD sind nicht definiert.
- $CD = 18 \in \mathbb{R}$
- $DC = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 4 \\ -4 & 4 & 0 & 8 \\ -6 & 6 & 0 & 12 \\ -8 & 8 & 0 & 16 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

Aufgabe 8
Anne, Béatrice und Charlotte stellen eines Tages fest, dass sie alle drei die gleichen Jeans tragen. Welche spezifischen Merkmale weist diese Hose auf, wenn man weiß, dass in ihren jeweiligen Kleiderschränken Anne eine enge Jeans mit Taschen und eine verwaschene ohne Taschen hat, Béatrice eine Jeans ohne Taschen und eine enge verwaschene mit Taschen besitzt und Charlotte schließlich eine Jeans mit weiten Beinen und eine dunkle, enge Jeans mit Taschen hat?
Lösung.
Wir stellen fest, dass in dieser Aufgabe Jeans genau drei Merkmale in einer von zwei Ausprägungen besitzen: Eine Jeans ist entweder eng (e) oder nicht eng ($\bar{e}$, d.h. weit), dunkel (d) oder nicht dunkel ($\bar{d}$, d.h. verwaschen), hat Taschen (t) oder keine Taschen ($\bar{t}$).

Wir nehmen an, dass sich die Ausprägungen eines Merkmals gegenseitig ausschließen, eine Jeans kan also z. B. nicht dunkel *und* verwaschen sein. Sind zu einer Jeans weniger als drei Ausprägungen bekannt, müssen die anderen Merkmale als unbekannt ausgeprägt angenommen werden.
Unter diesen Voraussetzungen ergeben sich $2^3 = 8$ verschiedene Jeans–Varianten. Zwei Jeans seien *gleich* , wenn sie in allen drei Merkmalen die selbe Ausprägung haben.
Wir erstellen eine Tabelle mit den 8 Möglichen Varianten und tragen die gegebenen Informationen ein. Dabei stehe A für Anne, B für Béatrice und C für Charlotte.

	edt	$ed\bar{t}$	$e\bar{d}t$	$e\bar{d}\bar{t}$	$\bar{e}dt$	$\bar{e}d\bar{t}$	$\bar{e}\bar{d}t$	$\bar{e}\bar{d}\bar{t}$
A	$\times$		$\times$	$\times$				$\times$
B		$\times$	$\times$	$\times$		$\times$		$\times$
C	$\times$				$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

Wir lesen aus der Tabelle ab: Die einzige Kombination von Ausprägungen, die alle drei Mädchen in ihrem Schrank haben könnten, lautet $\bar{e}\bar{d}\bar{t}$. Da wir wissen, dass es einen Jeans–Typ gibt, den sie alle drei besitzen, muss es der Genannte sein: Eine verwaschene Jeans mit weiten Beinen und ohne Taschen.