Aufgabe 2.7
Zeigen Sie mit direkten Beweisen, dass die folgenden für-alle-Aussagen gelten. Ergebnisse aus vorangegangenen Übungsaufgaben können dabei verwendet werden. Orientieren Sie sich beim Aufschreiben ihres Beweises an den grau hinterlegten Beispielen im vorangegangenen Abschnitt.

1. $\forall A$ **mit** $A =$ falsch **gilt** $\neg A$;
2. $\forall A, B$ **mit** A, B : Wahrheitswert; A; B **gilt** $A \wedge B$;

Aufgabe 2.8
Als Fortführung von Aufgabe 2.3, schreiben Sie folgende für-alle-Aussage als gut lesbare umgangssprachliche Regel auf:

$$\forall P, A \textbf{ mit } P \text{ lügt}; P \text{ behauptet } A \textbf{ gilt } \neg A$$

Formulieren Sie außerdem folgende Regel als eine für-alle-Aussage

Wenn eine Person nicht lügt und etwas behauptet, dann stimmt es.

Aufgabe 2.9
Wir nehmen an, dass die beiden Regeln aus Aufgabe 2.8 gelten und dass zusätzlich folgendes über drei Personen bekannt ist:

Alice behauptet: *Bob lügt.*
Bob behauptet: *Carmen lügt.*
Carmen behauptet: *Alice und Bob lügen.*

Führen Sie direkte Beweise für folgende Implikationsaussagen, indem Sie die Regeln anwenden (Zur Abkürzung kann man auf die erste Regel mit L und auf die zweite Regel mit W Bezug nehmen)

$$\begin{aligned}&(\text{Bob lügt}) \Rightarrow \neg(\text{Carmen lügt});\\ &\neg(\text{Bob lügt}) \Rightarrow (\text{Carmen lügt});\end{aligned}$$

Wie würden sich die Beweise der Aussagen

$$\begin{aligned}&(\text{Alice lügt}) \Rightarrow \neg(\text{Bob lügt});\\ &\neg(\text{Alice lügt}) \Rightarrow (\text{Bob lügt});\\ &(\text{Carmen lügt}) \Rightarrow \neg((\text{Alice lügt}) \wedge (\text{Bob lügt}));\\ &\neg(\text{Carmen lügt}) \Rightarrow ((\text{Alice lügt}) \wedge (\text{Bob lügt}));\end{aligned}$$

von den bereits geführten Beweisen unterscheiden?

Aufgabe 2.10
Beweisen Sie die folgenden Satzaussagen

$$\begin{aligned}&\forall x, y \textbf{ mit } x = y \textbf{ gilt } y = x;\\ &\forall x, y, z \textbf{ mit } x = y; y = z \textbf{ gilt } x = z;\end{aligned}$$

Die erste Eigenschaft nennt man auch *Symmetrie* der Gleichheit-Zuordnung, während die zweite *Transitivität* genannt wird. Die sogenannte *Reflexivität*

$$\forall x \textbf{ mit } x : \text{Objekt } \textbf{gilt } x = x;$$

müssen Sie nicht beweisen, da sie als Axiom gilt.

Aufgabe 2.11
Definieren Sie im Rahmen von Aufgabe 2.3 die Begriffe *Person*, *ehrlich* und *Lügner*. Definieren Sie außerdem den Begriff *Verweigerer* für eine Person, die gar nichts behauptet.

Aufgabe 2.12
Wir gehen wieder davon aus, dass es einen Begriff *Person* gibt, sowie eine Aussageform, die zwei Personen P, Q den Wahrheitswert (P liebt Q) zuordnet. Welche der umgangssprachlichen Sätze (i)-(iv) passt inhaltlich zu welcher der mathematischen Aussagen aus der Liste (a)-(f).

i) Jede Person liebt eine Person.

ii) Eine Person liebt eine Person.

iii) Eine Person liebt alle Personen.

iv) Alle Personen lieben alle Personen.

a) $\exists P$ **mit** P : Person; $\forall Q$ **mit** Q : Person **gilt** P liebt Q $\square$;

b) $\forall P$ **mit** P : Person **gilt** $\forall Q$ **mit** Q : Person **gilt** P liebt Q;

c) $\exists Q$ **mit** Q : Person; $\exists P$ **mit** P : Person; P liebt Q $\square$ $\square$;

d) $\forall Q$ **mit** Q : Person **gilt** $\forall P$ **mit** P : Person **gilt** P liebt Q;

e) $\exists P$ **mit** (P : Person)$\Rightarrow$ $\exists Q$ **mit** Q : Person; P liebt Q $\square$;

f) $\forall P$ **mit** P : Person **gilt** $\exists Q$ **mit** Q : Person; P liebt Q $\square$;

Aufgabe 2.13
Beweisen Sie für den Begriff

$$\text{wahreAussage} := A \textbf{ mit } A = \text{wahr} \ \square$$

dass folgende Aussagen gelten:

$$(\text{wahr} = \text{wahr}) : \text{wahreAussage};$$
$$\forall X \textbf{ mit } X : \text{wahreAussage} \textbf{ gilt } X;$$