

Aufgabe 2.14

Beweisen Sie mit einer Wahrheitstabelle die zweite de Morgansche Regel

$$\forall A, B \text{ mit } A, B : \text{Wahrheitswert gilt } (\neg(A \wedge B)) = ((\neg A) \vee (\neg B))$$

Zeigen Sie genauso, dass folgende Tautologien gelten

1. $\forall A$ mit A : Wahrheitswert gilt $(A \vee A) \Leftrightarrow A$;
2. $\forall A$ mit A : Wahrheitswert gilt $(A \wedge A) \Leftrightarrow A$;
3. $\forall A, B$ mit A, B : Wahrheitswert gilt $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$;
4. $\forall A, B$ mit A, B : Wahrheitswert gilt $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$;
5. $\forall A, B, C$ mit A, B, C : Wahrheitswert gilt $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$;
6. $\forall A, B, C$ mit A, B, C : Wahrheitswert gilt $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$;

Aufgabe 2.15

Beweisen Sie mit Hilfe der de Morganschen Tautologien die zugehörigen für-alle-Aussagen

$$\forall A, B \text{ mit } A, B : \text{Wahrheitswert; } \neg(A \vee B) \text{ gilt } (\neg A) \wedge (\neg B);$$

$$\forall A, B \text{ mit } A, B : \text{Wahrheitswert; } (\neg A) \vee (\neg B) \text{ gilt } \neg(A \wedge B);$$

Mit dem gleichen Prozess lassen sich mit jeder Tautologie aus Aufgabe 2.14 zwei für-alle-Aussagen ableiten. Formulieren Sie für eine der Tautologien die beiden zugehörigen Sätze.

Aufgabe 2.16

Beweisen Sie die folgenden beiden Sätze

$$\forall A, B \text{ mit } A, B : \text{Wahrheitswert; } A \text{ gilt } A \vee B;$$

$$\forall A, B \text{ mit } A, B : \text{Wahrheitswert; } B \text{ gilt } A \vee B;$$

Beweisen Sie damit die Tautologien

$$\forall A, B \text{ mit } A, B : \text{Wahrheitswert gilt } A \Rightarrow (A \vee B);$$

$$\forall A, B \text{ mit } A, B : \text{Wahrheitswert gilt } B \Rightarrow (A \vee B);$$

Aufgabe 2.17

Wir definieren

$$P : \text{Person} :\Leftrightarrow (P = \text{Alice}) \vee ((P = \text{Bob}) \vee (P = \text{Carmen})) \quad \square$$

Zeigen Sie ausgehend von dieser Definition des Begriffs *Person*, dass folgende Aussagen gelten:

$$\text{Alice, Bob, Carmen} : \text{Person};$$

Aufgabe 2.18

Zeigen Sie, dass folgender Satz gilt:

$$\forall A \text{ mit } A : \text{Wahrheitswert gilt } (\neg A) : \text{Wahrheitswert}$$

Aufgabe 2.19

Zeigen Sie mit der Methode aus Aufgabe 2.14, dass die Klammerungsreihenfolge bei dreifachen oder- bzw. und-Aussagen keine Rolle spielt (sogenannte Assoziativitätseigenschaft), d.h.

$$\forall A, B, C \text{ mit } A, B, C : \text{Wahrheitswert} \text{ gilt } ((A \vee B) \vee C) \Leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$$

$$\forall A, B, C \text{ mit } A, B, C : \text{Wahrheitswert} \text{ gilt } ((A \wedge B) \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C))$$

Wenn aber die Klammerung keine Rolle spielt, dann enthält sie auch keine Information und wird normalerweise unterdrückt, d.h. wir schreiben einfach $A \vee B \vee C$. Wieviele Klammermöglichkeiten gibt es bei einer vierfachen oder-Verknüpfung? Sind die resultierenden Aussagen auch alle äquivalent zueinander?

Aufgabe 2.20

Zeigen Sie mit der entsprechenden Tautologie, dass folgender Satz zur doppelten Verneinung gilt

$$\forall A \text{ mit } A : \text{Wahrheitswert}; \neg\neg A \text{ gilt } A;$$