

### Aufgabe 2.21

Beweisen Sie

- $\forall A$  mit  $A$  : Wahrheitswert;  $A; \neg A$  gilt wahr = falsch;
- $\forall A$  mit  $A$  : Wahrheitswert;  $A = \neg A$  gilt wahr = falsch;
- $(\exists \text{Widerspruch}) \Leftrightarrow (\text{wahr} = \text{falsch})$ ;
- $\neg \exists \text{Widerspruch}$ ;

### Aufgabe 2.22

Beweisen Sie folgenden Satz

$$\forall A \text{ mit } A : \text{Wahrheitswert}; \neg A \text{ gilt } A = \text{falsch};$$

### Aufgabe 2.23

Ziel dieser Aufgabe ist der Nachweis der Wahrheitstabelle zur Implikation

$A$	$B$	$A \Rightarrow B$
f	f	w
f	w	w
w	f	f
w	w	w

Dazu beweisen Sie zunächst folgende Sätze

1.  $\forall A, B$  mit  $A, B$  : Wahrheitswert;  $\neg A; \neg B$  gilt  $A \Rightarrow B$ ;
2.  $\forall A, B$  mit  $A, B$  : Wahrheitswert;  $\neg A; B$  gilt  $A \Rightarrow B$ ;
3.  $\forall A, B$  mit  $A, B$  : Wahrheitswert;  $A; \neg B$  gilt  $\neg(A \Rightarrow B)$ ;
4.  $\forall A, B$  mit  $A, B$  : Wahrheitswert;  $A; B$  gilt  $A \Rightarrow B$ ;

und wenden Sie diese anschließend geeignet an.

### Aufgabe 2.24

Da nun die Wahrheitstabelle der Implikation zur Verfügung steht, können Sie wie in Aufgabe 2.14 folgende Tautologien zeigen

1.  $\forall A, B$  mit  $A, B$  : Wahrheitswert gilt  $(A \wedge B) \Rightarrow A$ ;
2.  $\forall A, B$  mit  $A, B$  : Wahrheitswert gilt  $(A \wedge B) \Rightarrow B$ ;
3.  $\forall A, B$  mit  $A, B$  : Wahrheitswert gilt  $A \Rightarrow (A \vee B)$ ;
4.  $\forall A, B$  mit  $A, B$  : Wahrheitswert gilt  $B \Rightarrow (A \vee B)$ ;

Beweisen Sie mit dem dritten Satz die verwandte Regel

$$\forall A, B \text{ mit } A, B : \text{Wahrheitswert}; A \text{ gilt } A \vee B;$$

Wozu wird die Voraussetzung  $B$  : Wahrheitswert benötigt?

### Aufgabe 2.25

Zeigen Sie die Tautologie

$$\forall A, B \text{ mit } A, B : \text{Wahrheitswert} \text{ gilt } ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$$

mit einer Wahrheitstabelle. Verwenden Sie das Ergebnis, um folgenden Satz zu beweisen:

$$\forall A, B \text{ mit } A, B : \text{Wahrheitswert}; A \Rightarrow B; B \Rightarrow A \text{ gilt } A \Leftrightarrow B$$

**Aufgabe 2.26**

Zeigen Sie folgende Hilfsätze

$\forall A, B$  mit  $A, B$  : Wahrheitswert;  $A \vee B$ ;  $\neg A$  **gilt**  $B$ ;

$\forall A, B$  mit  $A, B$  : Wahrheitswert;  $A \vee B$ ;  $\neg B$  **gilt**  $A$ ;

**Aufgabe 2.27**

Zeigen Sie die folgende Tautologie

$\forall A, B$  mit  $A, B$  : Wahrheitswert **gilt**  $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$

In einem *Kontrapositionsbeweis* zeigt man die Implikation  $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$  und schließt dann, dass  $A \Rightarrow B$  gilt. Formulieren Sie diese Argumentation als einen Satz und beweisen Sie ihn.