

In den folgenden Aufgaben 2.28 – 2.30 ist jeweils ein Lösungsvorschlag angegeben. Darin sollen Sie Häkchen notieren, um korrekte Schritte zu kennzeichnen. Fehler sind durch Verbesserungen am Rand oder zwischen den Zeilen zu markieren. Ihre Gesamtbewertung soll in der Form  $k/b$  abgegeben werden, d.h. wenn im vorgeschlagenen Beweis zum Beispiel  $b = 7$  Schritte benötigt werden und  $k = 4$  davon korrekt angegeben sind, dann lautet die Bewertung  $4/7$ .

### Aufgabe 2.28

Beweisen Sie mit Hilfe der de Morganschen Tautologie die folgende für-alle-Aussage

$$\forall A, B \text{ mit } A, B : \text{Wahrheitswert}; \neg(A \vee B) \text{ gilt } (\neg A) \wedge (\neg B);$$

### Lösungsvorschlag zur Aufgabe 2.28

Anwendung der de Morganschen Tautologie ergibt

$$(\neg(A \vee B)) = ((\neg A) \wedge (\neg B))$$

Ersetze damit  $\neg(A \vee B)$  durch  $((\neg A) \wedge (\neg B))$ .

### Aufgabe 2.29

Beweisen Sie den folgenden Satz

$$\forall A, B \text{ mit } A, B : \text{Wahrheitswert}; A \text{ gilt } A \vee B;$$

### Lösungsvorschlag zur Aufgabe 2.29

Wende A15 an auf  $A$ . Dann gilt  $A = \text{wahr}$ .

Wenn  $B = \text{wahr}$ : ( $\text{wahr} \vee \text{wahr}$ ) = wahr.

Wenn  $B = \text{falsch}$ : ( $\text{wahr} \vee \text{falsch}$ ) = wahr.

Also  $(A \vee B) = \text{wahr}$ .

Ersetze damit *wahr* im Axiom **Es gilt** wahr durch  $A \vee B$ . Es gilt also  $A \vee B$ .

### Aufgabe 2.30

Zeigen Sie folgenden Satz

$$\forall A, B \text{ mit } A, B : \text{Wahrheitswert}; A \vee B; \neg A \text{ gilt } B;$$

### Lösungsvorschlag zur Aufgabe 2.30

Direkter Beweis: Gegeben  $A, B$  mit  $A, B : \text{Wahrheitswert}; A \vee B, \neg A$

A15 angewendet auf  $\neg A$ :  $\neg A = \text{wahr}$

A13: ( $\neg \text{wahr}$ ) = falsch, ersetze *wahr* mit  $\neg A$ : ( $\neg(\neg A)$ ) = falsch

S15 angewendet auf  $A$ : ( $\neg(\neg A)$ ) =  $A$ .

Ersetze ( $\neg(\neg A)$ ) mit  $A$ :  $A = \text{falsch}$ .

A15 angewendet auf  $A \vee B$ :  $(A \vee B) = \text{wahr}$ .

Ersetze  $A$  mit falsch: ( $\text{falsch} \vee B$ ) = wahr.

Fallunterscheidung: Fall  $B = \text{wahr}$ : ( $\text{falsch} \vee \text{wahr}$ ) = wahr (A10).

Fall  $B = \text{falsch}$ : ( $\text{falsch} \vee \text{falsch}$ ) = falsch (A9).

Da wahr  $\neq$  falsch, ist Fall  $B = \text{falsch}$  nicht zutreffend und der andere Fall  $B = \text{wahr}$  gilt ■

**Aufgabe 4.1**

Zeigen Sie, dass für den Begriff

$$R := x \text{ mit } x : \text{Begriff}; \neg(x : x) \quad \square$$

mit den neuen Beweisregeln folgende Aussagen gelten:

$$\neg(R : R); \quad R :: \text{Begriff}; \neg(R : \text{Begriff});$$

**Aufgabe 4.2**

Zeigen Sie, dass für den Begriff

$$R := x \text{ mit } x :: \text{Begriff}; \neg(x : x) \quad \square$$

mit den neuen Beweisregeln folgende Aussagen gelten:

$$\neg(R : R); \quad R :: R;$$