Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Vorkurs Mathematik 2017

Blatt 13

Aufgabe 59. Es seien $f : A \to B$ und $g : C \to D$ Funktionen mit $f(A) \subset C$. Wir erklären die **Verkettung von** f **mit** g, abgekürzt mit $g \circ f$, durch

$$g \circ f : A \to D, a \mapsto g(f(a)).$$

Es seien nun $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x + 2$ und $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x^3$. Geben Sie die Zuordnungsvorschrift für $g \circ f$ und $f \circ g$ an.

Aufgabe 60. Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion mit $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X)$.

(i) Zeigen Sie
$$A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2).$$

(ii) Zeigen Sie
$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

(iii) Geben Sie eine Funktion $f : X \to Y$ mit $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X)$ an, so dass gilt
$$f(A_1 \cap A_2) \subsetneq f(A_1) \cap f(A_2).$$

Aufgabe 61. Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion mit $B_1, B_2 \in \mathcal{P}(Y)$. Zeigen Sie

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

Aufgabe 62. Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen injektiv sind. Beweisen Sie jeweils die Richtigkeit Ihrer Antworten.

(i) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto 3n + 2$

(ii) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } x < 0 \\ x - 1, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$

Aufgabe 63. Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion und $B \in \mathcal{P}(Y)$. Zeigen Sie: f ist genau dann injektiv, wenn

$$\forall x_1 \in \mathrm{Def}(f) : \forall x_2 \in \mathrm{Def}(f) : (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2).$$

Ausdruck	**Aussprache**	**Bedingung**	**Abkürzung für**
$f : X \to Y$	f ist Funktion von X nach Y	X, Y ist Menge	Funktion(X, Y)
$\mathrm{Def}(f)$	Definitionsmenge von f	$\mathrm{Def}(f) \subset X$	–
$x \mapsto f(x)$	x wird auf $f(x)$ abgebildet	$x \in \mathrm{Def}(f), y \in Y$	–
$\mathrm{Bild}(f)$	Bild von f	f ist Funktion	$\{f(x) : x \in \mathrm{Def}(f)\}$
$f(A)$	Bild von A unter $f : X \to Y$	$f : X \to Y, A \in \mathcal{P}(X)$	$\{f(a) : a \in A\}$
$f^{-1}(B)$	Urbild von B unter $f : X \to Y$	$f : X \to Y, B \in \mathcal{P}(Y)$	$\{x \in X : f(x) \in B\}$