1.9 Beweis durch Kontraposition

Ein *Beweis durch Kontraposition* ist ein Spezialfall des indirekten Beweises. Wir betrachten zwei Aussagen A und B und wollen

$$A \Rightarrow B$$

zeigen, d.h. A ist als wahr vorausgesetzt. Nun nehmen wir $\neg B$ als wahr an und folgern, dass $\neg A$ wahr ist. Dies ist dann ein Widerspruch zur Voraussetzung, da A und $\neg A$ nicht beide wahr sein können. Also war unsere Annahme, $\neg B$ gilt, falsch und es muss B gelten. Wir haben also gezeigt

$$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B).$$

Genau analog können wir zeigen

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A).$$

Somit gilt

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A). \tag{1.42}$$

Anstatt $A \Rightarrow B$ zu zeigen, können wir die äquivalente Aussage $(\neg B \Rightarrow \neg A)$ nachweisen. Dies ist dann ein Beweis durch Kontraposition. Als Beispiel beweisen wir folgende Aussage

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} \forall c \in \mathbb{Z} : (a \neq b) \Rightarrow (a + c \neq b + c).$$

Zum Nachweis der Implikation gehen wir von $a, b, c \in \mathbb{Z}$. In einem Kontrapositionsbeweis nehmen wir $a + c = b + c$ an und zeigen $a = b$. (KPlus) angewandt auf $a + c$ und $b + c$ liefert

$$c + a = c + b.$$

Addition von $(-c)$ auf beiden Seiten liefert mit (PlusStabil)

$$-c + c + a = -c + c + b.$$

Anwendung von (AsPlus) auf beiden Seiten von links liefert

$$(-c + c) + a = (-c + c) + b.$$

Anwendung von (KPlus) und (InversPlus) in den Klammerausdrücken liefert

$$a = b.$$

Damit ist der Beweis erbracht. ∎

Merkregel Kontraposition: Um eine Implikation $(A \Rightarrow B)$ mittels Kontraposition zu beweisen, zeigen wir $(\neg B \Rightarrow \neg A)$.

Aufgabe 1.34. Zeigen Sie

$$\forall a \in \mathbb{Z} : |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

Aufgabe 1.35. Zeigen Sie

(i) $\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : (a = b) \Rightarrow \neg(a < b)$

(ii) $\forall m \in \mathbb{Z} : \neg(m < 0) \Rightarrow (m \geq 0)$.

Aufgabe 1.36. Zeigen Sie mittels Kontraposition:

$$\forall x \in \mathbb{Z} : (x > 1) \Rightarrow (x > 0).$$

1.10 Negationen von oder-/und-Aussagen

Wir betrachten ein komplexeres Beispiel zur Kontraposition. Wir wollen folgende Aussage zeigen: Falls ein Produkt zweier positiver Zahlen größer als 100 ist, so ist mindestens eine der Zahlen größer als 10. Dies notieren wir wie folgt

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} : (n \cdot m > 100) \Rightarrow (n > 10) \vee (m > 10). \tag{1.43}$$

Obige Aussage ist also von der Form

$$A \Rightarrow B \vee C$$

mit Aussagen A, B und C. Die Kontraposition hierzu ist

$$\neg(B \vee C) \Rightarrow \neg A.$$

Wir interessieren uns daher für die Negation einer oder-Aussage.

In ähnlicher Weise wie Negationen von Existenzaussagen zu für-alle-Aussagen stehen Negationen von oder-Aussagen zu und-Aussagen. Wie genau besagen die sogenannten *De Morganschen Regeln*: Für zwei Aussagen A und B gelten

(i) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

(ii) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

Zu (i) Nach Definition ist $A \vee B$ genau dann wahr, wenn mindestens eine der Aussagen wahr ist. Demnach ist die Negation von $A \vee B$ genau dann wahr, wenn keine der beiden Aussagen wahr ist, d.h. beide Aussagen müssen falsch sein, d.h. es müssen $\neg A$ und $\neg B$ gleichzeitig gelten.

Zu (ii) siehe Aufgabe 1.37

Merkregel De Morgan: Die Negation einer oder-Aussage ist äquivalent zur und-Aussage der Einzel-Negationen. Die Negation einer und-Aussage ist äquivalent zur oder-Aussage der Einzel-Negationen.

Mit den Regeln von De Morgan können wir nun die Kontraposition zu (1.43) formulieren:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} : (n \leq 10) \wedge (m \leq 10) \Rightarrow (n \cdot m \leq 100). \tag{1.44}$$

Die Aussage (1.44) folgt sofort aus Aufgabe 1.30 (iii) zum Umgang mit Ungleichungen.

Als weiteres Beispiel zur Kontraposition und den Regeln von De Morgan zeigen wir die Nullteilerfreiheit von $\mathbb{Z}$, d.h.

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : (a \cdot b = 0) \Rightarrow ((a = 0) \vee (b = 0)). \tag{1.45}$$

Nullteilerfreiheit bedeutet also: Wenn ein Produkt 0 ist, dann muss ein Faktor 0 sein.

Wir führen einen Beweis mittels Kontraposition und zeigen

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : ((a \neq 0) \wedge (b \neq 0)) \Rightarrow (a \cdot b \neq 0).$$

In einem direkten Beweis gehen wir von $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq 0$ und $b \neq 0$ aus. Nach (1.31) sind Beträge stets größergleich 0, d.h. $|a| \geq 0$ und $|b| \geq 0$. Nach Aufgabe 1.34 gilt $|a| > 0$ und $|b| > 0$. Mit Axiom (1.38) folgt $|a| \geq 1$ und $|b| \geq 1$. Nach Aufgabe 1.29 gilt $|a| \cdot |b| = |a \cdot b| \geq 1 \cdot 1 > 0$. Mit Aufgabe 1.22 folgt $|a \cdot b| \neq 0$. Wieder mit Aufgabe 1.34 folgt $a \cdot b \neq 0$. ∎

Wir führen eine nützliche Notation ein: Es seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $(a < b) \wedge (b < c)$. Hierfür schreiben wir kurz $(a < b < c)$. Wir halten fest

Ausdruck	**Aussprache**	**Bedingung**	**Abkürzung für**
$a < b < c$	a kleiner b kleiner c	$a, b, c \in \mathbb{Z}$	$(a < b) \wedge (b < c)$
$a < b \leq c$	a kleiner b kleinergleich c	$a, b, c \in \mathbb{Z}$	$(a < b) \wedge (b \leq c)$
$a \leq b \leq c$	a kleinergleich b kleinergleich c	$a, b, c \in \mathbb{Z}$	$(a \leq b) \wedge (b \leq c)$
$a \leq b < c$	a kleinergleich b kleiner c	$a, b, c \in \mathbb{Z}$	$(a \leq b) \wedge (b < c)$

Als Beispiel für die Benutzung dieser Notation zeigen wir

$$\forall a \in \mathbb{Z} : |a| < 2 \Leftrightarrow (-2 < a < 2). \tag{1.46}$$

Es sei $a \in \mathbb{Z}$. Wir zeigen zunächst die Implikation $|a| < 2 \Rightarrow (-2 < a < 2)$. In (1.35) und (1.36) haben wir bereits gezeigt, dass jede ganze Zahl kleinergleich seinem Betrag ist, d.h. es gelten $(a \leq |a|)$ und $(-a \leq |a|)$. Nach Voraussetzung ist $|a| < 2$ und mit der Transitivität der kleiner(gleich)-Relation folgt $(a < 2)$ und $(-a < 2)$. Mit Aufgabe 1.20(i) gilt $(-a < 2) \Leftrightarrow (a > -2)$, welches nur eine Abkürzung für $(-2 < a)$ ist. Insgesamt erhalten wir $(-2 < a) \wedge (a < 2)$, welches eine Abkürzung für $(-2 < a < 2)$ ist, qed.
Nun zur anderen Implikation, wir wollen also zeigen

$$\forall a \in \mathbb{Z} : (-2 < a < 2) \Rightarrow |a| < 2.$$

Wir gehen also von $a \in \mathbb{Z}$ mit $(-2 < a < 2)$ aus und führen eine Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen von a durch (dies ist wegen (1.34) möglich):

- Im Fall $a \geq 0$ gilt $|a| = a$. Nach Voraussetzung ist $a < 2$, somit gilt $|a| < 2$.
- Im Fall $a < 0$ gilt $|a| = -a$. Nach Voraussetzung ist $a > -2$, was äquivalent zu $-a < 2$ ist. Somit gilt $|a| < 2$.

Beide Fälle führen zum gleichen Ergebnis; damit ist der Beweis erbracht. ■

Nahverwandt hierzu ist die Intervallschreibweise. Wir gehen von $a, b \in \mathbb{Z}$ aus. Dann haben wir zunächst das *offene Intervall*

$$(a, b) := \{m \in \mathbb{Z} : a < m < b\}. \tag{1.47}$$

Das *abgeschlossene Intervall* ist

$$[a, b] := \{m \in \mathbb{Z} : a \leq m \leq b\} \tag{1.48}$$

und schließlich haben wir folgende *halboffene Intervalle*

$$(a, b] := \{m \in \mathbb{Z} : a < m \leq b\} \tag{1.49}$$
$$[a, b) := \{m \in \mathbb{Z} : a \leq m < b\}. \tag{1.50}$$

Aufgabe 1.37. Geben Sie eine Beweisschablone für folgende Aussage: Für zwei Aussagen A und B gilt

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B.$$

Aufgabe 1.38. Zeigen Sie

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : \forall c \in \mathbb{Z} : (c \nmid ab) \Rightarrow (c \nmid a) \wedge (c \nmid b).$$

Aufgabe 1.39. Zeigen Sie

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : \forall c \in \mathbb{Z}^* : (a \neq b) \Leftrightarrow (c \cdot a \neq c \cdot b).$$

Aufgabe 1.40. Zeigen Sie

$$\forall x \in \mathbb{Z} : |x| = 1 \Leftrightarrow (x = 1) \vee (x = -1).$$

Aufgabe 1.41. Zeigen Sie

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \exists a \in \mathbb{Z} : \exists b \in \mathbb{Z} : |x - 1| < 2 \Leftrightarrow x \in (a, b).$$

1.11 Negationen von Implikationen

Wir gehen von einer gültigen Implikation $(A \Rightarrow B)$ aus. Wie bereits erwähnt, ist die oder-Aussage $A \vee (\neg A)$ stets wahr. Folglich erhalten wir

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A) \vee B.$$

Die Implikation

$$(\neg A) \vee B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

gilt auch. Hierzu führen wir eine Fallunterscheidung durch

- Im Fall B gilt B unabhängig was A ist.
- Im Fall $(\neg A)$ führen wir eine weitere Fallunterscheidung nach dem Wahrheitswert von A durch
  - Im Fall „$(\neg A)$ ist wahr" ist A falsch und damit $(A \Rightarrow B)$ wahr.
  - Im Fall „$(\neg A)$ ist falsch" können wir sofort $(A \Rightarrow B)$ folgern, denn aus Falschem folgt alles.

Insgesamt erhalten wir also

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee B. \tag{1.51}$$

Die Negation von (1.51) erhalten wir über die entsprechende Regel von De Morgan

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge (\neg B)). \tag{1.52}$$

Als Beispiel betrachten wir Aussage

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : (a < b) \Rightarrow (a^2 < b^2). \tag{1.53}$$

Mit der Merkregel „Existenz eines Gegenbeispiels" und (1.52) ist die Negation von (1.53) gegeben durch

$$\exists a \in \mathbb{Z} : \exists b \in \mathbb{Z} : (a < b) \wedge (a^2 \geq b^2). \tag{1.54}$$

Um zu zeigen, dass die Aussage (1.53) nicht gilt, können wir also die Existenzaussage (1.54) nachweisen. Mit $a := -2$ und $b := -1$ sind $a, b \in \mathbb{Z}$ und ferner gilt $a^2 = 4$ und $b^2 = 1$. Für diese Wahl von a und b gilt $a < b$ und $a^2 > b^2$ und (1.54) nachgewiesen. Ein solches Beispiel nennen wir auch ein Gegenbeispiel von (1.53).

Merkregel „Implikation negieren": Die Negation von $(A \Rightarrow B)$ ist äquivalent zu $(A \wedge (\neg B))$.

Vorsicht (siehe Aufgabe 1.43): Die Negation von $(A \Rightarrow B)$ ist nicht äquivalent zu $(A \Rightarrow \neg B)$!

Aufgabe 1.42. Negieren Sie die Aussage

$$\forall x \in D : \forall y \in D : (f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y).$$

Aufgabe 1.43. Es seien A und B Aussagen. Zeigen Sie, dass die Aussagen $(\neg(A \Rightarrow B))$ und $(A \Rightarrow \neg B)$ nicht äquivalent sind.

Aufgabe 1.44. Zeigen Sie die Äquivalenzen folgender Aussagen

(i) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

(ii) $B \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

(iii) $(A \wedge B) \Rightarrow C$

1.12 Ist-Aussagen

In *Definitionen* werden *Begriffe* vereinbart. Ein Objekt ist genau dann ein Beispiel für einen Begriff, wenn es alle in der Definition aufgeführte *Bedingungen* erfüllt. Mit definierten Worten dürfen *ist-Aussagen* gebildet werden.

Beispielsweise sagen wir, eine Zahl ist *gerade*, wenn sie ganz und durch 2 teilbar ist. Wir notieren dies systematisch in der folgenden Form

Definition 1.1. m ist **gerade** genau dann, wenn

- $m \in \mathbb{Z}$
- $(2|m)$.

Als Beispiel zeigen wir die Aussage: 8 ist gerade.

Um nachzuweisen, dass 8 eine gerade Zahl ist, müssen wir zeigen, dass 8 die Bedingungen einer geraden Zahl erfüllt. Offenbar ist $8 \in \mathbb{Z}$ und $(2|8)$. Mithin ist 8 eine gerade Zahl. ■

Merkregel ist$_N$: Um nachzuweisen, dass ein Objekt ein Beispiel für einen Begriff ist, zeigen wir, dass es alle in der Definition aufgeführten Bedingungen erfüllt.

Als nächstes Beispiel zeigen wir: $\neg$(1 ist gerade).

Angenommen, 1 ist gerade. Dann gilt $(2|1)$. Nach (1.41) gilt auch $(2 \nmid 1)$. Dies ist ein Widerspruch. ■

Merkregel ist$_B$: Liegt ein Beispiel eines Begriffs vor, dann sind alle in der Definition aufgeführten Bedingungen für dieses Beispiel gültig und können benutzt werden.

Erwartungsgemäß verstehen wir unter einer *ungeraden Zahl* eine ganze Zahl, die nicht durch 2 teilbar ist. Wir geben folgende

Definition 1.2. m ist **ungerade** genau dann, wenn

- $m \in \mathbb{Z}$
- $(2 \nmid m)$.

Demnach gilt:

$$1 \text{ ist ungerade.} \tag{1.55}$$

Eine ganze Zahl m ist gerade oder ungerade, denn

$$(m \text{ ist gerade}) \vee (m \text{ ist ungerade})$$

ist eine Tautologie.

Das Negative einer geraden Zahl ist ebenfalls gerade:

$$\forall a \in \mathbb{Z} : (a \text{ ist gerade}) \Rightarrow (-a \text{ ist gerade}). \tag{1.56}$$

Wir gehen von einer geraden Zahl a aus. Demnach gibt es eine ganze Zahl k mit $a = 2k$. Somit ist $-a = (-k) \cdot 2 = \ell \cdot 2$ mit $\ell := -k$. Es gibt also eine ganze Zahl ℓ mit $-a = \ell \cdot 2$, d.h. $-a \in \mathbb{Z}$ und $(2|(-a))$. Mithin gilt $(-a$ ist gerade$)$. ■

Mittels Kontraposition von (1.56) erhalten wir: Das Negative einer ungeraden Zahl ist ebenfalls ungerade:

$$\forall a \in \mathbb{Z} : ((-a) \text{ ist ungerade}) \Rightarrow (a \text{ ist ungerade}). \tag{1.57}$$

Die Summe zweier gerader Zahlen ist gerade:

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : (a \text{ ist gerade}) \wedge (b \text{ ist gerade}) \Rightarrow ((a+b) \text{ ist gerade}). \tag{1.58}$$

Wir gehen von geraden Zahlen a und b aus. Somit gibt es ganze Zahlen k und ℓ mit $a = 2k$ und $b = 2\ell$. Also gilt

$$a + b = 2k + 2\ell = 2(k + \ell).$$

Demnach ist $m := k + \ell$ eine ganze Zahl mit $a + b = 2m$, d.h. es gilt $((a + b)$ ist gerade). ■

Bilden wir die Summe einer geraden Zahl mit einer ungeraden, so erhalten wir eine ungerade Zahl:

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : (a \text{ ist gerade}) \wedge (b \text{ ist ungerade}) \Rightarrow ((a+b) \text{ ist ungerade}). \quad (1.59)$$

Den Nachweis für (1.59) führen wir in Aufgabe 1.46.

Die Anwendung von (1.59) auf $a = -2$ und $b = 1$ liefert

$$((-1) \text{ ist ungerade}), \quad (1.60)$$

denn $(-1) = (-2) + 1$.

Die Begriffe *gerade* und *ungerade* sind *parameterunabhängig*. Daneben gibt es Begriffe, die *parameterabhängig* sind. Ein solcher ist der Begriff *Nachfolger* einer ganzen Zahl. Ebenso der Begriff *Vorgänger* einer ganzen Zahl. Wir geben folgende

Definition 1.3. n erfülle $n \in \mathbb{Z}$. Es gilt: m ist **Nachfolger**(n) (lies: Nachfolger von n) genau dann, wenn

- $m = n + 1$.

und ferner

Definition 1.4. n erfülle $n \in \mathbb{Z}$. Es gilt: m ist **Vorgänger**(n) (lies: Vorgänger von n) genau dann, wenn

- $m = n - 1$.

1.13 Existenz und Eindeutigkeit

Prinzipiell kann es bei definierten Begriffen mehrere unterschiedliche Beispiele geben. Jede ganze Zahl n hat aber *genau einen* Nachfolger(n) – dies notieren wir wie folgt

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \exists! m \in \mathbb{Z} : m \text{ ist Nachfolger}(n).$$

Diese $\exists!$-Aussage ist eine spezielle Existenz-Aussage, die ausdrückt, dass es *genau eine* ganze Zahl gibt, die die obige Forderung erfüllt. Wie weisen wir eine Aussage der allgemeinen Form

$$\exists! x \in M : A(x)$$

nach? Wir weisen zwei Aussagen nach:

(i) Es gibt *mindestens* ein Objekt, das die Aussage erfüllt.

(ii) Es gibt *höchstens* ein Objekt, das die Aussage erfüllt.

Zu (i): Dies ist die bekannte Existenzaussage $\exists x \in M : A(x)$(vgl. Abschnitt 1.1).
Zu (ii): Wir gehen von passenden Objekten aus und zeigen, dass diese identisch sind, also

$$\forall u \in M : \forall v \in M : A(u) \wedge A(v) \Rightarrow u = v.$$

Wir demonstrieren dieses Vorgehen, indem wir zeigen, dass eine ganze Zahl n *genau einen* Nachfolger(n) hat:

> Zu $n \in \mathbb{Z}$ ist $n+1$ nach Definition ein Nachfolger von n. Es gibt also mindestens einen Nachfolger von n. Seien nun m und k jeweils Nachfolger von n. Nach Definition gilt $m = n + 1$ und $k = n + 1$. Daraus folgt $m = k$. Es gibt also genau einen Nachfolger von n. ■

Wir können daher von *dem* Nachfolger von n sprechen. Analog sprechen wir von *dem* Vorgänger von n.

> **Merkregel $\exists!_N$:** Um die eindeutige Existenz eines Objekts mit angegebenen Eigenschaften nachzuweisen, zeigen wir, dass es mindestens ein solches Objekt gibt und ferner, dass zwei passende Objekte identisch sind.

Wir betrachten weitere Beispiele zur Existenz und Eindeutigkeit.

Definition 1.5. e ist **additionsneutral** genau dann, wenn

- $e \in \mathbb{Z}$
- $\forall x \in \mathbb{Z} : e + x = x$.

und

Definition 1.6. e ist **multiplikationsneutral** genau dann, wenn

- $e \in \mathbb{Z}$
- $\forall x \in \mathbb{Z} : e \cdot x = x.$

Es gilt

$$\exists! e \in \mathbb{Z} : (e \text{ ist additionsneutral}). \tag{1.61}$$

Nach Axiom (1.11) erfüllt 0 die Bedingungen der Definition 1.5, denn es gelten $0 \in \mathbb{Z}$ und

$$\forall x \in \mathbb{Z} : 0 + x = x. \tag{1.62}$$

Somit gibt es mindestens ein additionsneutrales Element. Es sei $e \in \mathbb{Z}$ ebenfalls additionsneutral, d.h.

$$\forall x \in \mathbb{Z} : e + x = x. \tag{1.63}$$

Wir wollen $e = 0$ zeigen. Wir können die für-alle-Aussage (1.62) auf e anwenden, da $e \in \mathbb{Z}$. Somit gilt

$$0 + e = e. \tag{1.64}$$

Analog können wir die für-alle-Aussage (1.63) auf 0 anwenden, und erhalten

$$e + 0 = 0. \tag{1.65}$$

Die linken Seiten von (1.64) und (1.65) sind wegen der Kommutativität (Axiom (1.7)) gleich, somit sind auch die rechten Seiten gleich und wir erhalten

$$e = 0,$$

was zu beweisen war. ■

Aufgabe 1.45. Definieren Sie die folgenden Begriffe (dabei dürfen Sie Begriffe wie etwa Funktion, Definitionsbereich einer Funktion oder $\mathbb{R}$ verwenden)

(i) Quadratzahl

(ii) Nullstelle

(iii) Extremstelle

Aufgabe 1.46. Zeigen Sie

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : (a \text{ ist gerade}) \wedge (b \text{ ist ungerade}) \Rightarrow ((a+b) \text{ ist ungerade}).$$

Aufgabe 1.47. Übersetzen Sie folgende Aussage von Textform in eine für-alle-Aussage und beweisen Sie sie

Der Nachfolger einer geraden Zahl ist ungerade.

Aufgabe 1.48. Zeigen Sie

$$\exists! e \in \mathbb{Z} : (e \text{ ist multiplikationsneutral}).$$

Aufgabe 1.49. Es sei $x \in \mathbb{Z}$. Wir definieren: x' ist genau dann Additionsinverses(x), wenn

- $x' \in \mathbb{Z}$
- $x' + x = 0$.

Zeigen Sie

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \exists! \text{Additionsinverses}(x).$$

Aufgabe 1.50. Zeigen Sie

$$\forall n \in \mathbb{N} : (n^2 \text{ ist ungerade}) \Rightarrow (n \text{ ist ungerade}).$$

2 Mengenlehre Version 30.9.17

Die gesamte Mengenlehre baut auf dem Begriff *Menge* und der Elementrelation $\in$ auf. Ist M eine Menge, so nennen wir ein Objekt x ein Element von M, wenn $x \in M$ erfüllt ist. Wir sagen dann auch, x ist in M enthalten, oder x liegt in M.

Enthält eine Menge N nur Elemente, die auch in M liegen, dann heißt N eine *Teilmenge* von M. Enthält M dabei mindestens ein Element mehr als N, so nennen wir N eine *echte Teilmenge* von M. In diesem Zusammenhang wird M auch *Obermenge* bzw. *echte Obermenge* von N genannt. Als Abkürzung schreiben wir

Ausdruck	**Aussprache**	**Bedingung**	**Abkürzung für**
$N \subset M$	N ist Teilmenge von M	M, N ist Menge	$\forall x \in N : x \in M$
$N \subsetneq M$	N ist echte Teilmenge von M	M, N ist Menge	$(N \subset M) \wedge (\exists x \in M : x \notin N)$

Enthält M alle Elemente von N und umgekehrt auch N alle Elemente von M, dann haben beide Mengen genau die gleichen Elemente. Das Gleichheitsaxiom besagt in diesem Fall, dass dann beide Mengen gleich sind. Eine Menge ist also genau durch die in ihr enthaltenen Elemente festgelegt.

$$\forall N : \forall M : (N \subset M) \wedge (M \subset N) \Leftrightarrow N = M.$$

Zum Nachweis von Mengengleichheiten werden aus diesem Grund in der Regel die beiden Inklusionen nachgewiesen.

Merkregel Mengengleichheit: Für zwei Mengen A und B gilt: $A = B$ genau dann wenn $A \subset B$ und $B \subset A$.

Die weiteren Axiome der Mengengleichheit besagen, wie man aus gegebenen Mengen neue Mengen konstruieren kann. Damit diese Regeln auch anwendbar sind, muss natürlich mindestens eine Menge überhaupt existieren. Die Existenzannahme

$$\exists M : M \text{ ist Menge} \tag{2.1}$$

ist deshalb ebenfalls ein wichtiges Mengenaxiom.

Ist nun M eine Menge, so besagt das *Aussonderungsaxiom* der Mengenlehre, dass auch die Zusammenfassung aller Elemente $x \in M$, die eine Aussage $A(x)$ erfüllen, wieder eine Menge bilden. Diese bezeichnen wir mit dem Symbol

$$\{x \in M : A(x)\}. \tag{2.2}$$

Durch Aussonderung erhalten wir aus jeder Menge M eine sogenannte *leere Menge*

$$L := \{x \in M : x \neq x\}. \tag{2.3}$$

Zum Nachweis, dass keine Elemente von L existieren, benötigen wir das bereits eingeführe Axiom (1.16) zur Gleichheit (GReflexiv)

$$\forall x : x = x.$$

Nehmen wir nun an, dass ein x mit $x \in L$ existiert, dann gilt $x \neq x$, was einen Widerspruch zu (GReflexiv) darstellt. ∎

Mit L haben wir ein Beispiel einer sogenannten leeren Menge vorliegen. Genauer definieren wir

Definition 2.7. M ist **leer**, genau dann, wenn

- M ist Menge
- $\neg(\exists x : x \in M)$

Mit diesem Begriff können wir unsere bewiesene Aussage auch in der Form

$$(L \text{ ist leer})$$

angeben.

Als nächstes zeigen wir, dass jede leere Menge Teilmenge jeder anderen Menge ist, also

$$\forall A : \forall L : (A \text{ ist Menge}) \wedge (L \text{ ist leer}) \Rightarrow L \subset A \tag{2.4}$$

Schreiben wir die Teilmengenaussage in Langform, so erhalten wir die Form

$$\forall A : \forall L : (A \text{ ist Menge}) \wedge (L \text{ ist leer}) \Rightarrow \forall a \in L : a \in A. \tag{2.5}$$

Nun ist aber jede für-alle-Aussage über Elemente einer leeren Menge wahr, denn es gibt keine Elemente, für die die fragliche Eigenschaft überprüft werden müsste. Damit ist (2.5) wahr und daher auch (2.4) nachgewiesen.

Im nächsten Schritt zeigen wir, dass es genau eine leere Menge gibt, also

$$\exists! L : (L \text{ ist leer}). \tag{2.6}$$

Da die Existenz schon nachgewiesen ist, benötigen wir nur noch die Eindeutigkeit. Dazu gehen wir von zwei leeren Mengen L, M aus. Wegen (2.4) angewendet auf L, M gilt

$$L \subset M.$$

Ebenfalls wegen (2.4) gilt aber auch

$$M \subset L.$$

Hieraus folgt $L = M$. ∎

Aufgrund der Eindeutigkeit können wir von *der* leeren Menge sprechen; diese bezeichnen wir üblicherweise mit $\varnothing$ oder auch $\{\}$.

Ein weiteres Axiom der Mengenlehre besagt, dass die Menge aller Teilmengen einer Menge A wieder eine Menge ist. Sie wird Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ genannt, d.h.

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subset A\}. \tag{2.7}$$

Beispielsweise gilt

$$\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\},$$

d.h. die Potenzmenge der leeren Menge enthält ein Element, nämlich die leere Menge, während die leere Menge kein Element enthält.

Für die Menge

$$A = \{a, b, c\}$$

gilt

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Die *Schnittmenge* $M \cap N$ zweier Mengen M und N erhalten wir mittels Aussonderung

$$M \cap N := \{x \in M : x \in N\},$$

diese enthält alle Elemente, die sowohl in M und N liegen. Also gilt

$$\forall x : x \in M \cap N \Leftrightarrow (x \in M) \wedge (x \in N).$$

Ohne Aussonderung können wir daher auch schreiben

$$M \cap N = \{x : (x \in M) \wedge (x \in N)\}$$

Die *Differenzmenge* $M \backslash N$ erhalten wir, wenn wir aus M alle Elemente aus N entfernen, d.h.

$$M \backslash N := \{x \in M : x \notin N\}.$$

Somit gilt

$$\forall x : x \in M \backslash N \Leftrightarrow (x \in M) \wedge (x \notin N).$$

Die *Vereinigungsmenge* $M \cup N$ ist diejenige Menge, die genau die Gesamtheit der Elemente von M und N umfasst, d.h.

$$\forall x : x \in M \cup N \Leftrightarrow (x \in M) \vee (x \in N).$$

Wir halten fest

Ausdruck	**Aussprache**	**Bedingung**	**Abkürzung für**
$\varnothing$	die leere Menge	–	$\{x : x \neq x\}$
$\mathcal{P}(A)$	Potenzmenge von A	A ist Menge	$\{B : B \subset A\}$
$M \cap N$	M geschnitten N	M, N ist Menge	$\{x : (x \in M) \wedge (x \in N)\}$
$M \backslash N$	M ohne N	M, N ist Menge	$\{x : (x \in M) \wedge (x \notin N)\}$
$M \cup N$	M vereinigt N	M, N ist Menge	$\{x : (x \in M) \vee (x \in N)\}$

Wir illustrieren nun den Umgang mit Mengen.

Es gilt

$$\forall A : (A \text{ ist Menge}) \Rightarrow (A \cup \varnothing = A). \tag{2.8}$$

Anstelle der für-alle-Form benutzen wir zur Notation von Sätzen auch oft eine äquivalente Prosa-Variante, die so aussehen könnte:

Satz 2.1. Sei A eine Menge. Dann gilt

$$A \cup \varnothing = A.$$

Zum Nachweis von Satz 2.1 gehen wir von einer Menge A aus und zeigen die folgenden zwei Inklusionen gemäß der Merkregel Mengengleichheit

(i) $A \subset (A \cup \varnothing)$

(ii) $(A \cup \varnothing) \subset A$.

Zu (i): Es sei $x \in A$. Offenbar gilt dann

$$(x \in A) \vee (x \in \varnothing),$$

denn diese oder-Aussage ist wahr (obwohl $(x \in \varnothing)$ falsch ist), d.h.

$$A \subset (A \cup \varnothing).$$

Zu (ii): Ebenso gilt

$$(x \in A) \vee (x \in \varnothing) \Rightarrow (x \in A).$$

Hierzu führen wir eine Fallunterscheidung durch:

- Im Fall $(x \in A)$ erhalten wir sofort $(x \in A)$.
- Im Fall $(x \in \varnothing)$ erhalten wir einen Widerspruch. Also gilt $(x \in A)$.

Insgesamt gilt $(x \in A)$, d.h. $(A \cup \varnothing) \subset A$. Da beide Inklusionen (i) und (ii) gelten, erhalten wir die gewünschte Mengengleichheit. ■

Aufgabe 2.1. Es sei A eine Menge. Zeigen Sie

$$A \cap \varnothing = \varnothing.$$

Hinweis: Notieren Sie die Aussage zunächst in für-alle-Form.

Aufgabe 2.2. Es seien A, B und C Aussagen. Geben Sie eine Beweisschablone für folgendes Distributivgesetz

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

Aufgabe 2.3. Zeigen Sie für Mengen A, B und C die folgenden Aussagen

(i) $A \subset (A \cup B)$

(ii) $(A \cap B) \subset A$

(iii) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$

(iv) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.

Aufgabe 2.4. Es seien A und B Mengen. Zeigen Sie

$$A \cap B = A \backslash (A \backslash B).$$

Aufgabe 2.5. Zeigen Sie die Aussage

$$\exists! L : (L \text{ ist leer}),$$

indem Sie die Beweisidee aus dem Skript in höchster Sorgfaltsstufe wiederholen. Höchste Sorgfaltsstufe bedeutet, dass alle verwendeten Merkregeln angegeben werden und deren Verwendung in Idealform durchgeführt wird.