Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Vorkurs Mathematik 2018

**Blatt 13**

**Aufgabe 60.** Es seien $f : A \to B$ und $g : C \to D$ Funktionen mit $f(A) \subset C$. Wir erklären die **Verkettung von** $f$ **mit** $g$, abgekürzt mit $g \circ f$, durch

$$g \circ f : A \to D, a \mapsto g(f(a)).$$

Es seien nun $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x + 2$ und $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto x^3$. Geben Sie die Zuordnungsvorschrift für $g \circ f$ und $f \circ g$ an.

**Aufgabe 61.** Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion mit $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X)$.

(i) Zeigen Sie
$$A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2).$$

(ii) Zeigen Sie
$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

(iii) Geben Sie eine Funktion $f : X \to Y$ mit $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X)$ an, so dass gilt
$$f(A_1 \cap A_2) \subsetneq f(A_1) \cap f(A_2).$$

**Aufgabe 62.** Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion mit $B_1, B_2 \in \mathcal{P}(Y)$. Zeigen Sie

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

**Aufgabe 63.** Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen injektiv sind. Beweisen Sie jeweils die Richtigkeit Ihrer Antworten.

(i) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto 3n + 2$

(ii) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } x < 0 \\ x - 1, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$

**Aufgabe 64.** Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion und $B \in \mathcal{P}(Y)$. Zeigen Sie: $f$ ist genau dann injektiv, wenn

$$\forall x_1 \in \mathrm{Def}(f) : \forall x_2 \in \mathrm{Def}(f) : (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2).$$

| **Ausdruck** | **Aussprache** | **Bedingung** | **Abkürzung für** |
|---|---|---|---|
| $f : X \to Y$ | $f$ ist Funktion von $X$ nach $Y$ | $X, Y$ ist Menge | $\text{Funktion}(X, Y)$ |
| $\mathrm{Def}(f)$ | Definitionsmenge von $f$ | $f : X \to Y, \mathrm{Def}(f) \subset X$ | – |
| $x \mapsto f(x)$ | $x$ wird auf $f(x)$ abgebildet | $f : X \to Y, x \in \mathrm{Def}(f)$, $f(x) \in Y$ | – |
| $\mathrm{Bild}(f)$ | Bild von $f$ | $f$ ist Funktion | $\{f(x) : x \in \mathrm{Def}(f)\}$ |
| $f(A)$ | Bild von $A$ unter $f : X \to Y$ | $f : X \to Y, A \in \mathcal{P}(X)$ | $\{f(a) : a \in A\}$ |
| $f^{-1}(B)$ | Urbild von $B$ unter $f : X \to Y$ | $f : X \to Y, B \in \mathcal{P}(Y)$ | $\{x \in X : f(x) \in B\}$ |