Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Vorkurs Mathematik 2018

Blatt 16

Aufgabe 75. Es seien $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, n \mapsto a_n$ und $b : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, n \mapsto b_n$. Ferner seien $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit *einem* Summensymbol

(i) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$

(ii) $49 + 1 + 9 + 25 + 16 + 4 + 36$

(iii) $a_{n-1} + a_1 + \sum_{k=3}^{n-2} a_k + a_2$

(iv) $\alpha \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \cdot \sum_{m=2}^{n} b_m$.

Aufgabe 76. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion

(i) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n+1} a_{k-1}$ (ii) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Aufgabe 77. Es seien

$$A := \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 25\} \text{ und } B := \{n \in \mathbb{N} : 17 \leq n \leq 40\}.$$

Berechnen Sie

(i) $\sum_{k \in A \cup B} k$ (ii) $\sum_{k \in A \cap B} k$ (iii) $\sum_{k \in A \setminus B} k$ (iv) $\sum_{k \in A \cup B} k^2$.

Aufgabe 78. Es sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, n \mapsto a_n$. Hier bezeichnet $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen. Wir definieren

$$\prod_{k=1}^{n} a_k$$

rekursiv durch

$$\prod_{k=1}^{1} a_k := a_1 \text{ und } \prod_{k=1}^{n+1} a_k := \prod_{k=1}^{n} a_k \cdot a_{n+1}.$$

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion

$$\forall n \in \mathbb{N} : \prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} k.$$