Beweismechanik

Prof. Dr. Michael Junk, Dr. Jan-Hendrik Treude

Inhaltsverzeichnis

1 Beweisschritte

Ob ein Beweistext *richtig* ist, entscheidet sich *nicht* daran, dass er logisch *klingt* oder überzeugend *wirkt*. Es geht beim Beweisen nicht ums Überreden und auch nicht um blumiges Beschreiben. So banal es klingt: *Ein Beweis ist richtig, wenn er die standardisierten Beweistexte für die grundlegenden Aussagetypen entsprechend der Regeln verknüpft und am Ende die geforderten Ziele durch Kombination der geltenden Aussagen erfüllt werden.*

In den folgenden Abschnitten werden wichtige Aussageformen mit ihren zugehörigen Nachweis- und Benutzungstexten vorgestellt. Zur Illustration sind die Formen dabei mit konkreten Ausdrücken gefüllt, wobei die diffuse Darstellung darauf hindeuten soll, dass es auf den konkreten Inhalt beim Aufbau des Textes zunächst gar nicht ankommt. Es genügt erst einmal, die runden Felder sinngemäß in die grauen eckigen Kästchen einzufüllen. Enthält ein Feld ein Baustellenzeichen, so muss der Inhalt *vorher* im Beweistext bereits nachgewiesen worden sein.

> Halte Dich beim Aufschreiben **stur** an die Vorgaben. Fasse nicht mehrere Textblöcke zusammen und lasse auch keine aus.
> **Der entstehende Text hilft, strukturiert zu denken und Fehler zu vermeiden**.

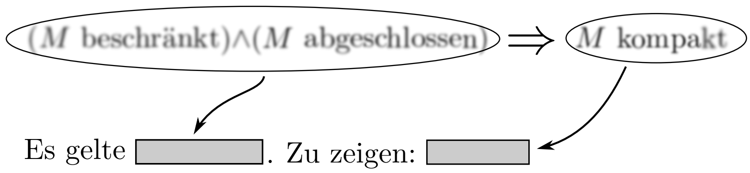
Beachte, dass das Aufschreiben eines Beweises im Wesentlichen ein *mechanischer* Vorgang ist, der *keine* Kreativität sondern nur Konzentration und Sturheit verlangt. Er dient der Buchhaltung über Argumentationsziele, verwendbare Objekte und geltende Aussagen.

Kreativität *wird* verlangt, wenn Du auf ein Baustellenzeichen triffst, oder wenn beim Nachweis einer Existenzaussage ein konkreter Ausdruck anzugeben ist, der bestimmte Eigenschaften hat. Hier muss mit dem Vorrat an gegebenen Objekten und geltenden Aussagen geschickt und einsichtig kombiniert werden, damit die Textmechanik anschließend korrekt weiterlaufen kann.

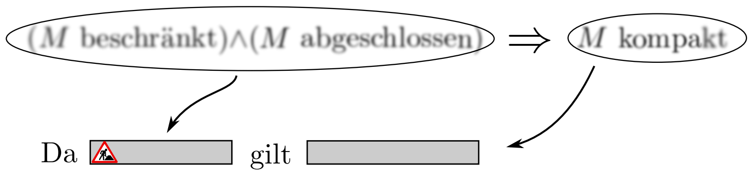
Für einen erfolgreichen Beweis benötigst Du also Mechanik *und* Kreativität. Ohne Kreativität bleibt die Mechanik stehen, aber die Mechanik zeigt genau, *wo* Kreativität nötig ist und *wie* das Ergebnis der Kreativität aussehen muss.

1.1 Implikation

Nachweis



Benutzung



Hintergrund

Eine Implikation beschreibt eine Regel: *Wenn* die Voraussetzung erfüllt ist, *dann* gilt die Folgerung. Zum Nachweis müssen wir deshalb die Folgerung unter Annahme der Voraussetzung zeigen, während bei der Nutzung die Folgerung nur dann verwendet werden darf, wenn die Voraussetzung erfolgreich überprüft wurde.

Zurück zum Inhaltsverzeichnis

1.2 Äquivalenz

Nachweis

$$\underbrace{(M \text{ beschränkt}) \wedge (M \text{ abgeschlossen})}_{A} \Leftrightarrow \underbrace{M \text{ kompakt}}_{B}$$

Zu zeigen: $\boxed{A} \Rightarrow \boxed{B}$

und $\boxed{B} \Rightarrow \boxed{A}$

Benutzung

$$\underbrace{(M \text{ beschränkt}) \wedge (M \text{ abgeschlossen})}_{A} \Leftrightarrow \underbrace{M \text{ kompakt}}_{B}$$

Da $\boxed{A}$ gilt $\boxed{B}$

oder

Da $\boxed{B}$ gilt $\boxed{A}$

Die Äquivalenz kann außerdem dazu verwendet werden, die eine Aussage durch die andere in Ausdrücken zu ersetzen, ohne dass sich die Bedeutung dabei ändert.

Hintergrund

Zwei Aussagen sind äquivalent (gleichwertig), wenn sie den gleichen Wahrheitswert besitzen. Der Nachweis $A \Rightarrow B$ zeigt dabei, dass B wahr ist, wenn A wahr ist. Ist A dagegen falsch, so zeigt der Nachweis von $B \Rightarrow A$, dass B nicht wahr sein kann, weil sonst ja auf das Gelten von A geschlossen werden könnte.

Zurück zum Inhaltsverzeichnis

1.3 Und-Aussage

Nachweis

$$(A \cap B = \emptyset) \wedge (A = B)$$

Zu zeigen $\boxed{}$ und $\boxed{}$

Benutzung

$$(A \cap B = \emptyset) \wedge (A = B)$$

Es gelten $\boxed{}$ und $\boxed{}$

Hintergrund

Eine und-Aussage gilt genau dann, wenn beide beteiligte Aussagen gelten.

Zurück zum Inhaltsverzeichnis

1.4 Oder-Aussage

Nachweis

Eine oder-Aussage gilt, wenn mindestens eine der beteiligten Aussagen wahr ist. Die folgende Nachweisregel schließt aus, dass beide falsch sind.

$$\underbrace{(A \cap B = \emptyset)}_{L} \vee \underbrace{(A = B)}_{R}$$

Fall $\boxed{\neg L}$: Zeige $\boxed{R}$

oder

Fall $\boxed{\neg R}$: Zeige $\boxed{L}$

Lässt sich eine der beiden Aussagen ohne die Annahme des Gegenteils der anderen zeigen, so muss die Annahme nicht extra erwähnt werden.

Benutzung

$$(A \cap B = \emptyset) \vee (A = B)$$

Fall $\boxed{}$: also $P(A|B) \in \{0, 1\}$

Fall $\boxed{}$: also $P(A|B) \in \{0, 1\}$

Insgesamt gilt damit $P(A|B) \in \{0, 1\}$

Hintergrund

Beim Argumentieren mit einer oder-Aussage kann man von keiner der beteiligten Aussagen mit Sicherheit ausgehen. Lässt allerdings jede Aussage für sich die gleiche Folgerung zu, so genügt es, dass mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist, um die Folgerung zu begründen. Das ist die Idee der Fallunterscheidung.

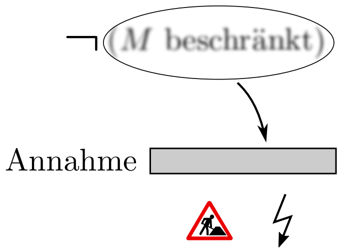
In der Nachweisregel wird die Fallunterscheidung auf eine der immer geltenden oder-Aussagen $L \vee (\neg L)$ bzw $R \vee (\neg R)$ angewendet um $L \vee R$ zu zeigen.

Zurück zum Inhaltsverzeichnis

1.5 Negation

Nachweis

Im Widerspruchsbeweis sucht man eine geltende Aussage, deren Negation ebenfalls gilt (das Schild weist auf das Suchen und der Blitz auf das Finden hin).



Für spezielle Aussagetypen lassen sich Negationen äquivalent umformen: Oder-Aussagen verwandeln sich in und-Verknüpfungen der Negationen (Regeln von deMorgan) und Existenzaussagen werden zu für-alle Aussagen mit negierten Folgerungen. Umgekehrt gelten entsprechende Regeln für negierte und- bzw. für-alle-Aussagen.

Benutzung

Gilt die Negation einer negierten Aussage, so gilt auch die Aussage selbst.

Hintergrund

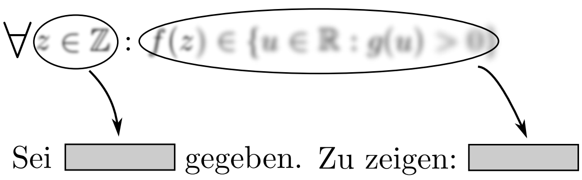
Beim Beweis durch Widerspruch geht man unausgesprochen von der Widerspruchsfreiheit im betrachteten mathematischen Universum aus: Wenn vor der Argumentation kein Widerspruch existiert, durch die Annahme aber ein Widerspruch sichtbar wird, dann muss die angenommenen Aussage den Widerspruch erzeugt haben. Sie kann also nicht wahr sein, d.h. ihr Gegenteil muss gelten. Ist der Widerspruch dagegen schon vor der Annahme entstanden, dann ist die aktuelle Gedankenwelt schon widersprüchlich, so dass es nichts ausmacht, die Gültigkeit der negierten Annahme zu akzeptieren.

Zurück zum Inhaltsverzeichnis

1.6 Für-alle Aussage

Nachweis

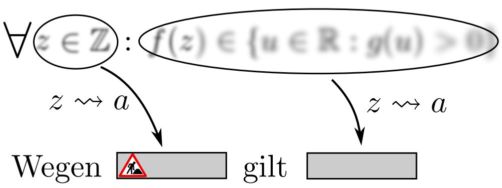
Wird der Platzhaltername (hier z) im laufenden Beweis bereits verwendet, so muss er an *allen* Stellen durch einen noch unbenutzten Namen ersetzt werden.



Fehlt die Mengenangabe (wie in $\forall z : z = z$), so lautet der erste Textteil *Sei das Element z gegeben.*

Benutzung

Anwendung auf ein vorliegendes Element a ist möglich, wenn die Mengenbedingung für a anstelle des Platzhalters erfüllt ist (mögliche Nachweisarbeit ist *vorher* zu erbringen). Fehlt die Mengenangabe, so muss geprüft werden, ob a ein Element ist.



Hintergrund

Um zu zeigen, dass eine Aussage für alle Elemente einer Menge gilt, erzeugt man eine *Argumentationsschablone*: Für ein Element (etwa mit Namen z), von dem außer der Mengenzugehörigkeit nichts bekannt ist, zeigt man die z-abhängige Aussage. Sie gilt dann auch *für jedes* konkrete Element der Menge anstelle von z, da sich die Argumentation in jedem Einzelfall wiederholen ließe. Das Gelten einer für-alle Aussage entspricht dem Vorliegen einer Argumentationsschablone.

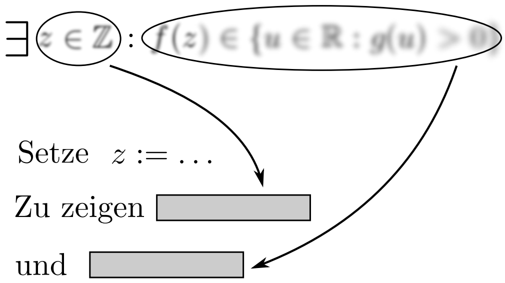
Zurück zum Inhaltsverzeichnis

1.7 Existenzaussage

Nachweis

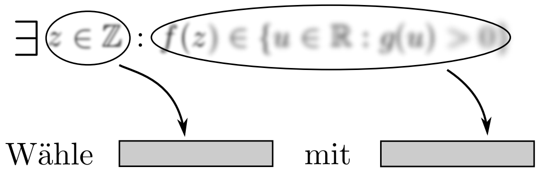
Es muss ein konkretes Beispiel angegeben werden, das die beiden Bedingungen erfüllt. Wird der Platzhaltername (hier z) im laufenden Beweis bereits für ein Objekt verwendet, so schreibt man sich die Existenzaussage in Gedanken mit einem noch freien Namen um.

> Oft hilft es, den Beweistext (auf einem Schmierblatt) für die geforderten Bedingungen mit dem noch unbekannten Element zu beginnen, um dann an den Zwischenzielen genauer abzulesen, wie es gewählt werden muss, um sie zu erfüllen.



Benutzung

Auch hier muss der Platzhaltername durch einen noch unbenutzten Namen ersetzt werden, wenn er im laufenden Beweis bereits für ein Objekt verwendet wird.



Hintergrund

Der offensichtltlichste Nachweis dafür, dass in einer Menge ein Element mit einer vorgegebenen Eigenschaft existiert, besteht darin, ein solches Element konkret anzugeben. Gilt eine Existenzaussage, kann man umgekehrt davon ausgehen, dass ein Element in der Menge mit der angegebenen Eigenschaft ausgewählt werden kann.

Zurück zum Inhaltsverzeichnis

1.8 Eindeutigkeit

Nachweis

$z \in \mathbb{Z}$ mit $f(z) = 0$ ist eindeutig

Seien $\boxed{x, y \in \mathbb{Z}}$ und $\boxed{f(x) = 0, f(y) = 0}$

Zu zeigen $\boxed{x = y}$

Benutzung

$z \in \mathbb{Z}$ mit $f(z) = 0$ ist eindeutig

Da $\boxed{x, y \in \mathbb{Z}}$ und $\boxed{f(x) = 0, f(y) = 0}$

gilt $\boxed{x = y}$

Hintergrund

Zeigt man für zwei Elemente mit den geforderten Bedingungen, dass sie automatisch gleich sind, kann es keine zwei unterschiedlichen Beispiele geben. Die Bedingungen legen das Element also eindeutig fest.

Zurück zum Inhaltsverzeichnis

Eindeutigkeitsaussagen treten oft zusammen mit Existenzaussagen auf, wobei dann das Symbol $\exists!$ für eindeutige Existenz benutzt wird. In diesem Fall muss die Existenzaussage zusätzlich gezeigt bzw. kann zusätzlich benutzt werden.

1.9 Sätze

Nachweis

Sind Voraussetzungen und Folgerungen in der Formulierung eines Satzes stark vermischt, kann eine Neuordnung als Anfangstext im Beweis sinnvoll sein.

Satz 5.3

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt.

Dann ist $f(K)$ kompakt.

Beweis: Zu zeigen

Benutzung

Zur Anwendung eines Satzes müssen die Platzhalter (hier f, K) durch die gewünschten Objekte ersetzt werden (hier z.B. die Objekte g, M aus dem laufenden Beweis).

Satz 5.3

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt.

Vor

Dann ist $f(K)$ kompakt.

Flg

$f, K \rightsquigarrow g, M$ $\qquad$ $f, K \rightsquigarrow g, M$

Da Vor folgt (mit Satz 5.3) Flg

Auf die Beweisnummer oder den -namen muss nicht zwingend verwiesen werden, wenn Voraussetzung und Folgerung den Satz erkennbar machen.

Hintergrund

Mathematische Sätze entsprechen textliche Varianten von für-alle Aussagen (mit den Satz-Platzhaltern) über Implikationen (wenn die Voraussetzungen gelten, dann auch die Folgerungen). Die Regeln entsprechen denen für $\forall$ und $\Rightarrow$.

Zurück zum Inhaltsverzeichnis

1.10 Definitionen und Abkürzungen

Nachweis

Bei der Aufstellung der Langform müssen Platzhalter durch die konkreten Objekte der abgekürzten Aussage ersetzt werden.

M ist kompakt

Def. 3.8. $K \subset \mathbb{R}$ heißt kompakt, wenn jede Folge in K eine Teilfolge hat, die in K konvergiert.

$K \rightsquigarrow M$

(Nach Def. 3.8 ist) zu zeigen:

Benutzung

M ist kompakt

Def. 3.8. $K \subset \mathbb{R}$ heißt kompakt, wenn jede Folge in K eine Teilfolge hat, die in K konvergiert.

$K \rightsquigarrow M$

Laut Definition gilt:

Hintergrund

Tritt in einer Aussage eine Abkürzung auf, so wird diese beim Nachweis durch die entsprechende Langform ersetzt, weil so die nachzuweisenden Details sichtbar werden. Entsprechend steht bei Benutzung die detailliertere Aussage zur Verfügung.

Zurück zum Inhaltsverzeichnis

Definitionen ersetzen einen längeren Ausdruck oder eine verschachtelte Aussage durch abkürzende Symbole oder Begriffe.

1.11 Teilmenge

Nachweis

Der gewählte Elementname (hier x) darf im laufenden Beweis noch keine Bedeutung tragen.

$$f(\mathbb{Z}) \subset \{u \in \mathbb{Z} : (u-1)/3 \in \mathbb{Z}\}$$

Sei $x \in$ ☐ gegeben. Zu zeigen: $x \in$ ☐

Benutzung

$$f(\mathbb{Z}) \subset \{u \in \mathbb{Z} : (u-1)/3 \in \mathbb{Z}\}$$

Wegen $x \in$ ☐ gilt auch $x \in$ ☐

Hintergrund

Die Teilmengen-Aussage $A \subset B$ ist gleichbedeutend mit: Für alle Elemente aus A gilt, dass sie auch Elemente von B sind. Die Regeln ergeben sich damit direkt aus den $\forall$-Regeln.

Zurück zum Inhaltsverzeichnis

1.12 Mengengleichheit

Nachweis

$$\underset{A}{f(\mathbb{Z})} = \underset{B}{\{u \in \mathbb{Z} : (u-1)/3 \in \mathbb{Z}\}}$$

Zu zeigen: $\boxed{A} \subset \boxed{B}$

und $\boxed{B} \subset \boxed{A}$

Benutzung

Gilt eine Mengengleichheit so kann man in jedem Ausdruck eine der Mengen durch die andere ersetzen, ohne dass sich die Bedeutung der Aussage ändert.

Hintergrund

Zwei Mengen sind gleich, wenn sie genau die gleichen Elemente besitzen, also wenn jedes Element der einen Menge in der anderen liegt und umgekehrt. Dies sind gerade zwei Teilmengenaussagen.

Zurück zum Inhaltsverzeichnis

1.13 Funktionsgleichheit

Nachweis

$$f = g$$

Zu zeigen $\boxed{\mathrm{Def}(f) = \mathrm{Def}(g)}$

und $\boxed{\forall x \in \mathrm{Def}(f) : f(x) = g(x)}$

Benutzung

Gilt eine Funktionsgleichheit so kann man in jedem Ausdruck eine der Funktionen durch die andere ersetzen, ohne dass sich die Bedeutung der Aussage ändert.

Hintergrund

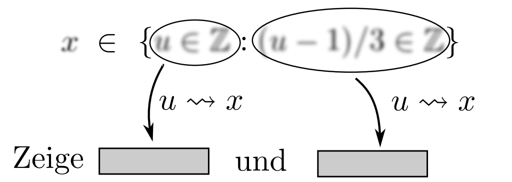
Zwei Funktionen sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Argumente zulassen und dort jeweils die gleichen Funktionswerte liefern.

Zurück zum Inhaltsverzeichnis

1.14 Element einer Aussonderung

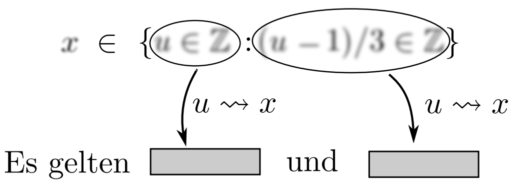
Nachweis

Ist die Mengenbeschreibung vom Grundtyp $\{u : E_u\}$ so reduziert sich die erste Bedingung auf die Überprüfung x *ist ein Element*.



Benutzung

Ist die Mengenbeschreibung vom Grundtyp $\{x : E_x\}$ so reduziert sich die erste Folgerung auf x *ist ein Element*.



Hintergrund

Bei der Bildung einer Aussonderungsmenge übernimmt man genau die Elemente u einer Grundmenge M, die eine Bedingung B_u erfüllen. Alle beschriebenen Zutaten erkennt man in der Notation $\{u \in M : B_u\}$.

Nach dieser Konstruktionsangabe ist also x genau dann in $\{u \in M : B_u\}$, wenn $x \in M$ und B_x gilt.

Zurück zum Inhaltsverzeichnis