Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Vorkurs Mathematik 2019

Blatt 1

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen gelten, indem Sie das Vorgehen aus dem entsprechenden Abschnitt der Vorlesung wiederholen.

(i) $14|98$

(ii) $\exists x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : \exists z \in \mathbb{Z} : x^2 + y^2 = z^2$

Aufgabe 2. Formulieren Sie folgende umgangssprachlichen Aussagen als mathematische Existenzaussagen und beweisen Sie deren Gültigkeit:

(i) Es gibt eine Zahl, deren Quadrat gleich 4 ist.

(ii) Es gibt eine Quadratzahl von der Form $3 \cdot n + 1$ mit einer natürlichen Zahl n.

Aufgabe 3. Die Namen von Platzhaltern in Existenzaussagen sind willkürlich und können ausgetauscht werden, ohne den Sinn der Aussage zu verändern. Führen Sie in der Existenzaussage

$$\exists a \in \mathbb{N} : \exists b \in \mathbb{N} : \exists c \in \mathbb{N} : a^2 + b^2 = c^2$$

folgende Namensersetzungen durch

(i) $a \to u, b \to v, c \to w$

(ii) $a \to c, b \to a, c \to b$

Aufgabe 4. Welche der folgenden Existenzaussagen können allein durch Namensänderung in die gleiche Form gebracht werden?

(i) $\exists u \in \mathbb{Z} : \exists v \in \mathbb{Z} : \exists w \in \mathbb{Z} : u + v = v + w$

(ii) $\exists v \in \mathbb{Z} : \exists u \in \mathbb{Z} : \exists w \in \mathbb{Z} : u + v = v + w$

(iii) $\exists v \in \mathbb{Z} : \exists u \in \mathbb{Z} : \exists w \in \mathbb{Z} : u + v = w + v$

(iv) $\exists u \in \mathbb{Z} : \exists v \in \mathbb{Z} : \exists w \in \mathbb{Z} : v + u = u + w$

(v) $\exists v \in \mathbb{Z} : \exists w \in \mathbb{Z} : \exists u \in \mathbb{Z} : u + w = w + v$

(vi) $\exists w \in \mathbb{Z} : \exists u \in \mathbb{Z} : \exists v \in \mathbb{Z} : w + u = u + v$

(vii) $\exists w \in \mathbb{Z} : \exists u \in \mathbb{Z} : \exists v \in \mathbb{Z} : u + w = w + v$

(viii) $\exists w \in \mathbb{Z} : \exists v \in \mathbb{Z} : \exists u \in \mathbb{Z} : u + v = v + w$

(ix) $\exists w \in \mathbb{Z} : \exists u \in \mathbb{Z} : \exists v \in \mathbb{Z} : w + u = u + v$

(x) $\exists u \in \mathbb{Z} : \exists v \in \mathbb{Z} : \exists w \in \mathbb{Z} : v + u = w + u$

Zusatzaufgabe 1. (x, y, z) mit ganzen Zahlen x, y und z heißt ein **pythagoreisches Tripel**, wenn

$$x^2 + y^2 = z^2$$

gilt. Zeigen Sie: Es gibt unendlich viele pythagoreische Tripel.