Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Vorkurs Mathematik 2019

Blatt 5

Aufgabe 23. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten

(i) $\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : (a < b) \Leftrightarrow ((-a) > (-b))$

(ii) $\forall x \in \mathbb{Z} : (x \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (x > 0)$.

Drücken Sie (i) mit eigenen Worten aus.

Aufgabe 24. Zeigen Sie indirekt

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : ((x^2 + y = 13) \land (y \neq 4)) \Rightarrow (x \neq 3).$$

Aufgabe 25. Zeigen Sie

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : (a > b) \Rightarrow (a \neq b).$$

Aufgabe 26. Es seien A, B und C Aussagen. Gilt die folgende Aussage

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \quad ?$$

Beweisen Sie die Richtigkeit Ihrer Antwort.

Zusatzaufgabe 3.
Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl, die genau zwei Teiler hat. Zwei Primzahlen p und q bilden ein *Primzahlzwilling*, wenn ihre Differenz genau 2 beträgt. So sind etwa $(3, 5)$ und $(11, 13)$ Beispiele für Primzahlzwillinge. Es ist nicht bekannt, wie viele Primzahlzwillinge es gibt. Drei Primzahlen p, q und r bilden ein *Primzahldrilling*, wenn der Abstand zwischen p und q bzw. der Abstand zwischen q und r genau 2 beträgt. Zeigen Sie, dass nur $(3, 5, 7)$ ein Primzahldrilling bilden (d.h. es gibt keine weiteren Primzahldrillinge).

Zusatzaufgabe 4.
Für diese Aufgabe darf die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als bekannt vorausgesetzt werden. $q \in \mathbb{R}$ heißt **rational**, wenn es $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{Z}^*$ gibt mit

$$q = \frac{m}{n}.$$

Zeigen Sie: Es gibt keine rationale Zahl $q \in \mathbb{R}$ mit

$$q^2 = 2.$$