Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Vorkurs Mathematik 2019

Blatt 14

Aufgabe 64. (i) Entscheiden Sie, ob $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto 3n + 2$ surjektiv auf $\mathbb{N}$ ist.

(ii) Entscheiden Sie, ob $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } x < 0 \\ x - 1, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$
surjektiv auf $\mathbb{Z}$ ist. Begründen Sie jeweils die Richtigkeit Ihrer Antworten.

Aufgabe 65. Es sei $f : X \to Y$. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent zueinander? Begründen Sie die Richtigkeit Ihrer Antwort.

(i) $\forall x_1 \in \mathrm{Def}(f) : \forall x_2 \in \mathrm{Def}(f) : (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$

(ii) $\forall x_1 \in \mathrm{Def}(f) : \forall x_2 \in \mathrm{Def}(f) : (x_1 = x_2) \Rightarrow (f(x_1) = f(x_2))$

(iii) $\neg\left[\exists x_1 \in \mathrm{Def}(f) : \exists x_2 \in \mathrm{Def}(f) : (x_1 \neq x_2) \wedge (f(x_1) = f(x_2))\right]$

(iv) $\forall x_1 \in \mathrm{Def}(f) : \forall x_2 \in \mathrm{Def}(f) : (x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))$

Aufgabe 66. Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen. Zeigen Sie

$$(g \circ f \text{ ist injektiv}) \Rightarrow (f \text{ ist injektiv}).$$

Aufgabe 67. Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen im allgemeinen **falsch** sind, indem Sie jeweils ein Gegenbeispiel angeben:

(i) $(g \circ f \text{ ist injektiv}) \Rightarrow (g \text{ ist injektiv})$

(ii) $(g \circ f \text{ ist surjektiv}) \Rightarrow (f \text{ ist surjektiv})$

Aufgabe 68. Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion und $B \in \mathcal{P}(Y)$. Zeigen Sie: f ist genau dann surjektiv auf B, wenn

$$\forall y \in B : |f^{-1}[\{y\}]| \geq 1.$$

Aufgabe 69. Entscheiden und begründen Sie, ob

(i) es eine injektive Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$
(ii) es eine injektive Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ gibt.

Zusatzaufgabe 14.
Wir setzen die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als bekannt voraus. Bestimmen Sie alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass gilt

$$\forall x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : f(f(x) \cdot f(y)) + f(x + y) = f(x \cdot y).$$

Zusatzaufgabe 15.
Gibt es eine surjektive Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$? Begründen Sie die Richtigkeit Ihrer Antwort.