Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Vorkurs Mathematik 2019

Blatt 15

Aufgabe 70. Zeigen Sie mit dem Beweisprinzip der vollständigen Induktion

(i) $\forall n \in \mathbb{N} : 7|(8^n - 1)$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N} : 6|(2n^3 + 3n^2 + n)$

(iii) $\forall n \in \mathbb{N} : 19|(5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1})$

Sie können hier die in Aufgabe 20 (Blatt 4) bewiesene Aussage

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : \forall c \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : (a|b) \wedge (a|c) \Rightarrow a|(xb + yc)$$

verwenden.

Aufgabe 71. Zeigen Sie mit dem Beweisprinzip der vollständigen Induktion

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \forall n \in \mathbb{N} : (x \geq -1) \Rightarrow [(1+x)^n \geq (1+nx)].$$

Aufgabe 72. Zeigen Sie mit dem Beweisprinzip der vollständigen Induktion

$$\forall n \in \mathbb{N} : (n \geq 10) \Rightarrow (2^n > n^3).$$

Aufgabe 73. Zeigen Sie mit dem Beweisprinzip der vollständigen Induktion

$$\forall a \in \mathbb{N} : \forall b \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2}.$$

Hierbei dürfen Sie die bekannten Schulrechenregeln für Brüche benutzen.

Zusatzaufgabe 16. Die sogenannte **Vorwärts-Rückwärts-Induktion** ist eine Variante zur vollständigen Induktion. Auch sie hat einen Induktionsanfang wie die gewöhnliche vollständige Induktion. Der Induktionsschritt besteht aber aus einem Vorwärts- und einem Rückwärtsschritt. Konkret besagt sie:

Merkregel Vorwärts-Rückwärts-Induktion: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage und es gelte

- Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr
- Induktionsschritt:
  - Vorwärtsschritt: $\forall n \in \mathbb{N} : A(n) \Rightarrow A(2n)$
  - Rückwärtsschritt: $\forall n \in \mathbb{N} : A(n) \Rightarrow A(n-1)$

Dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir setzen die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als bekannt voraus. Beweisen Sie mit Hilfe der Vorwärts-Rückwärts-Induktion die folgende Aussage

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_{>0} : \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}}.$$