Blatt 16

Aufgabe 74. Es seien $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, n \mapsto a_n$ und $b : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, n \mapsto b_n$. Ferner seien $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit *einem* Summensymbol

(i) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$

(ii) $49 + 1 + 9 + 25 + 16 + 4 + 36$

(iii) $a_{n-1} + a_1 + \sum_{k=3}^{n-2} a_k + a_2$

(iv) $\alpha \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \cdot \sum_{m=2}^{n} b_m$.

Aufgabe 75. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion

$$\text{(i)} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n+1} a_{k-1} \qquad \text{(ii)} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Aufgabe 76. Es seien

$$A := \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 25\} \text{ und } B := \{n \in \mathbb{N} : 17 \leq n \leq 40\}.$$

Berechnen Sie

$$\text{(i)} \sum_{k \in A \cup B} k \qquad \text{(ii)} \sum_{k \in A \cap B} k \qquad \text{(iii)} \sum_{k \in A \setminus B} k \qquad \text{(iv)} \sum_{k \in A \cup B} k^2.$$

Aufgabe 77. Es sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, n \mapsto a_n$. Hier bezeichnet $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen. Wir definieren

$$\prod_{k=1}^{n} a_k$$

rekursiv durch

$$\prod_{k=1}^{1} a_k := a_1 \text{ und } \prod_{k=1}^{n+1} a_k := \prod_{k=1}^{n} a_k \cdot a_{n+1}.$$

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion

$$\forall n \in \mathbb{N} : \prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} k.$$

Zusatzaufgabe 17.

Bekanntlich hat ein Schachbrett 64 Felder. Auf das 1. Feld wird nun 1 Reiskorn gelegt, auf das 2. Feld 2 Reiskörner, auf das 3. Feld 4 Reiskörner, usw. Auf ein Feld kommt jeweils doppelt soviel wie auf das vorangegangene; dabei vernachlässigen wir, dass die Felder wohlmöglich zu klein für die Reiskörner werden. Berechnen Sie die exakte Anzahl der Reiskörner auf dem Schachbrett und weisen Sie die Richtigkeit Ihrer Antwort nach.