Vorkurs 2019, Blatt 16, Lösungsvorschläge

Aufgabe 74. Es seien $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, n \mapsto a_n$ und $b : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, n \mapsto b_n$. Ferner seien $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit *einem* Summensymbol

(i) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$

(ii) $49 + 1 + 9 + 25 + 16 + 4 + 36$

(iii) $a_{n-1} + a_1 + \sum_{k=3}^{n-2} a_k + a_2$

(iv) $\alpha \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \cdot \sum_{m=2}^{n} b_m$.

(i) Es gilt
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = \sum_{k=1}^{7} (2k - 1).$$

(ii) Es gilt
$$49 + 1 + 9 + 25 + 16 + 4 + 36 = \sum_{k=1}^{7} k^2.$$

(iii) Wir führen eine Fallunterscheidung durch:

- Für $n - 2 \geq k = 3$ erhalten wir $n \geq 5$ und damit:
$$a_{n-1} + a_1 + \sum_{k=3}^{n-2} a_k + a_2 = \sum_{k=1}^{n-1} a_k.$$

- Für $n - 2 < k = 3$ ist $n < 5$ und weiter
$$\sum_{k=3}^{n-2} a_k = 0,$$
also gilt
$$a_{n-1} + a_1 + \sum_{k=3}^{n-2} a_k + a_2 = a_{n-1} + a_1 + a_2.$$
Aus der Schreibweise a_{n-1} und $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich $n \geq 2$, insgesamt erhalten wir hier also $2 \leq n < 5$. Daraus ergeben sich 3 weitere Unterfälle:

- Im Fall $n = 2$ erhalten wir
$$a_{n-1} + a_1 + \sum_{k=3}^{n-2} a_k + a_2 = a_{n-1} + a_1 + a_2 = 2a_1 + a_2.$$
- Im Fall $n = 3$ erhalten wir
$$a_{n-1} + a_1 + \sum_{k=3}^{n-2} a_k + a_2 = a_{n-1} + a_1 + a_2 = a_1 + 2a_2.$$
- Im Fall $n = 4$ erhalten wir
$$a_{n-1} + a_1 + \sum_{k=3}^{n-2} a_k + a_2 = a_{n-1} + a_1 + a_2 = a_1 + a_2 + a_3 = \sum_{k=1}^{3} a_k.$$

(iv) Es gilt
$$\alpha \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \cdot \sum_{m=2}^{n} b_m = \alpha \cdot a_1 + \sum_{m=2}^{n} (\alpha \cdot a_m + \beta \cdot b_m).$$

Aufgabe 75. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion

(i) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n+1} a_{k-1}$ (ii) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(i) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ die Aussage
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n+1} a_{k-1}.$$
IA: Für $n = 1$ ergibt sich für die linke Seite
$$\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1,$$
für die rechte Seite ergibt sich
$$\sum_{k=2}^{1+1} a_{k-1} = \sum_{k=2}^{2} a_{k-1} = a_{2-1} = a_1.$$

Die linke stimmt mit der rechten Seite überein, also gilt $A(1)$.
IS: Es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n+1} a_{k-1}.$$

Zu zeigen ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=2}^{n+2} a_{k-1}.$$

Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} \overset{\mathrm{IV}}{=} \sum_{k=2}^{n+1} a_{k-1} + a_{n+1} = \sum_{k=2}^{n+1} a_{k-1} + a_{(n+2)-1} = \sum_{k=2}^{n+2} a_{k-1}.$$

Damit ist der Induktionsschritt gezeigt. Nach dem Beweisverfahren der vollständigen Induktion gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. ■

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ die Aussage

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

IA: Für $n = 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{6}{6}.$$

Also gilt $A(1)$.
IS: Es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Zu zeigen ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$
$$= \frac{(n^2+3n+2)(2n+3)}{6} = \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6},$$

zu zeigen ist also

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}. \tag{1}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \overset{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(2n^3+3n^2+n)+(6n^2+12n+6)}{6} \\
&= \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}.
\end{aligned}$$

Also ist (1) und damit der Induktionsschritt gezeigt. Nach dem Beweisverfahren der vollständigen Induktion gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. ■

Aufgabe 76. Es seien

$$A := \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 25\} \text{ und } B := \{n \in \mathbb{N} : 17 \leq n \leq 40\}.$$

Berechnen Sie

$$\text{(i)} \sum_{k \in A \cup B} k \qquad \text{(ii)} \sum_{k \in A \cap B} k \qquad \text{(iii)} \sum_{k \in A \setminus B} k \qquad \text{(iv)} \sum_{k \in A \cup B} k^2.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
A \cup B &= \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 40\} \\
A \setminus B &= \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 16\} \\
A \cap B &= \{n \in \mathbb{N} : 17 \leq n \leq 25\}
\end{aligned}$$

Somit gilt mit der Gaußschen Summenformel

(i) $$\sum_{k\in A\cup B} k = \sum_{k=1}^{40} k = \frac{40\cdot 41}{2} = 20\cdot 41 = 820$$

(ii) $$\sum_{k\in A\setminus B} k = \sum_{k=1}^{16} k = \frac{16\cdot 17}{2} = 8\cdot 17 = 136$$

(iii) $$\sum_{k\in A\cap B} k = \sum_{k=17}^{25} k = \sum_{k=1}^{25} k - \sum_{k=1}^{16} k = \frac{25\cdot 26}{2} - \frac{16\cdot 17}{2}$$
$$= 13\cdot 25 - 8\cdot 17 = 325 - 136 = 189$$

(iv) $$\sum_{k\in A\cup B} k^2 = \sum_{k=1}^{40} k^2 \overset{\text{A75(ii)}}{=} \frac{40(40+1)(2\cdot 40+1)}{6} = \frac{40\cdot 41\cdot 81}{6} = 22140.$$

Aufgabe 77. Es sei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, n \mapsto a_n$. Hier bezeichnet $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen. Wir definieren

$$\prod_{k=1}^{n} a_k$$

rekursiv durch

$$\prod_{k=1}^{1} a_k := a_1 \text{ und } \prod_{k=1}^{n+1} a_k := \prod_{k=1}^{n} a_k \cdot a_{n+1}.$$

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion

$$\forall n \in \mathbb{N} : \prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} k.$$

In der Vorlesung haben wir die Summenformel

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

gezeigt. Angewendet auf $(n+1)$ erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Die Behauptung ist also äquivalent zu

$$\forall n \in \mathbb{N} : \prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Es sei $A(n)$ die Aussage

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

IA: Für $n = 1$ gilt

$$\prod_{k=1}^{1} \frac{k+2}{k} = \frac{1+2}{1} = 3 = \frac{(1+1)(1+2)}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2}.$$

Also gilt $A(1)$.
IS: Es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Zu zeigen ist

$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{k+2}{k} = \frac{(n+2)(n+3)}{2}.$$

Es gilt

$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{k+2}{k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k} \cdot \frac{n+3}{n+1} \overset{\text{IV}}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \cdot \frac{n+3}{n+1} = \frac{(n+2)(n+3)}{2}.$$

Damit ist der Induktionsschritt gezeigt. Nach dem Beweisverfahren der vollständigen Induktion gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. ■

Zusatzaufgabe 17. Bekanntlich hat ein Schachbrett 64 Felder. Auf das 1. Feld wird nun 1 Reiskorn gelegt, auf das 2. Feld 2 Reiskörner, auf das 3. Feld 4 Reiskörner, usw. Auf ein Feld kommt jeweils doppelt soviel wie auf das vorangegangene; dabei vernachlässigen wir, dass die Felder wohlmöglich zu klein für die Reiskörner werden. Berechnen Sie die exakte Anzahl der Reiskörner auf dem Schachbrett und weisen Sie die Richtigkeit Ihrer Antwort nach.

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann behaupten wir

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1. \tag{2}$$

Diese Aussage angewandt auf die Aufgabe erhalten wir mit $n = 63$: Die Summe aller Reiskörner auf dem Schachbrett ist $2^{64} - 1$. Wir beweisen nun die Aussage (2) mit vollständiger Induktion. Es sei $A(n)$ die Aussage

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

IA: Für $n = 0$ (wir wählen hier als Induktionsanfang 0 und nicht 1) erhalten wir

$$\sum_{k=0}^{0} 2^k = 2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1.$$

Also gilt $A(0)$.
IS: Es gelte die Aussage $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Zu zeigen ist

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+2} - 1.$$

Wir haben

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{n+1} \overset{\text{IV}}{=} 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1.$$

Damit ist der Induktionsschritt gezeigt. Nach dem Beweisverfahren der vollständigen Induktion gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. ■

Bemerkung: Zur Übung können Sie für $q \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ die *geometrische Summenformel* zeigen

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Für $q = 2$ ergibt sich als Spezialfall die Aussage (2). Welche Aussage ergibt sich für $q = 1$?