1 Grundregeln der Logik Version 30.08.19

Um Mathematik betreiben zu können, müssen wir in der Lage sein, Sachverhalte präzise zu beschreiben und mitzuteilen. Dies tun wir in Form von mathematischen Aussagen. Im Unterschied zur Umgangssprache werden mathematische Aussagen nach genau festgelegten Regeln zusammengesetzt und mit speziellen Symbolen notiert. Die Aufbauregeln stellen dabei sicher, dass mathematische Aussagen wahr oder falsch sein können. Ziel ist es, den tatsächlichen Wahrheitswert von mathematischen Aussagen herauszufinden.

Den Umgang mit mathematischen Aussagen üben wir zunächst mit den natürlichen und ganzen Zahlen. Die *natürlichen Zahlen* sind diejenigen Zahlen, die wir zum Zählen benutzen

$$1, 2, 3, \text{usw.}$$

Für diese Menge benutzen wir das Symbol $\mathbb{N}$. Es reicht an dieser Stelle, wenn wir *intuitiv* mit dem Begriff „Menge“ umgehen – eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten. Ein Objekt ist ein *Element* einer Menge, wenn es in ihr enthalten ist. Eine Möglichkeit eine Menge anzugeben, ist das Auflisten aller ihrer Elemente, also z. B.

$$M := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Hier ist M als Name für die Menge vereinbart, die die Zahlen 1 bis 6 enthält. Der neue Name steht dabei links vom Definitionssymbol := während der abgekürzte Ausdruck rechts steht. Um auszudrücken, dass 3 in M enthalten ist schreiben wir $3 \in M$. Die allgemeine Form dieses Aussagetyps ist

Ausdruck	**Aussprache**	**Bedingung**	**Abkürzung für**
$x \in A$	x ist ein Element von A	A ist Menge	–

In dieser Tabelle sind x, A sogenannte *Platzhalter*, die in konkreten Fällen durch mathematische Objekte *ersetzt* werden. Beispielsweise erhalten wir $3 \in M$, wenn wir x durch 3 und A durch M ersetzen.

Mit $\mathbb{N}_0$ bezeichnen wir die natürlichen Zahlen inklusive der Zahl 0. Mit $\mathbb{Z}$ bezeichnen wir die Menge aller ganzen Zahlen, d.h. eine ganze Zahl ist eine natürliche Zahl, 0 oder das Negative einer natürlichen Zahl. Mit $\mathbb{Z}^*$ bezeichnen wir die ganzen Zahlen ohne Null.

Andere Ausdrücke, die wir hier zunächst ohne weitere Erläuterung aus der Schule übernehmen, sind die Rechenoperationen auf den natürlichen bzw. ganzen Zahlen, also

Ausdruck	**Aussprache**	**Bedingung**	**Abkürzung für**
$n = m$	n gleich m	$n, m \in \mathbb{Z}$	–
$n + m$	n plus m	$n, m \in \mathbb{Z}$	–
$-n$	minus n	$n \in \mathbb{Z}$	–
$n - m$	n minus m	$n, m \in \mathbb{Z}$	$n + (-m)$
$n \cdot m$	n mal m	$n, m \in \mathbb{Z}$	–

1.1 Existenzaussagen

Zum Einstieg werden wir uns einfache Fragestellungen rund um den Begriff der *Teilbarkeit* anschauen. Eine ganze Zahl n teilt eine andere ganze Zahl m, wenn die Division ohne Rest aufgeht: So teilt z. B. 4 die Zahl 8 oder 7 die Zahl 21. Die Division geht genau dann auf, wenn m ein Vielfaches von n ist. Anders formuliert: n teilt m, wenn eine ganze Zahl k existiert, so dass $m = k \cdot n$ gilt. Immer wenn wir $n|m$ schreiben steht an dieser Stelle gedanklich die ausführlichere Beschreibung mit der folgenden Existenzaussage

$$\exists k \in \mathbb{Z} : m = k \cdot n.$$

Hier ist $\exists$ der *Existenz-Quantor*. Der obige Ausdruck wird nun gelesen als *Es gibt eine ganze Zahl k mit der Eigenschaft $m = k \cdot n$*. Die zu erfüllende Eigenschaft steht hinter dem Doppelpunkt. Wir halten fest

Ausdruck	**Aussprache**	**Bedingung**	**Abkürzung für**
$n|m$	n teilt m	$n, m \in \mathbb{Z}$	$\exists k \in \mathbb{Z} : m = k \cdot n$

Der Nachweis, dass eine Existenzaussage gilt, besteht einfach darin, dass wir ein Beispielobjekt mit den geforderten Bedingungen angeben. Der Beweis für die Aussage $(3|21)$ sieht zum Beispiel so aus:

Idealform $\exists_N$

Wegen $7 \in \mathbb{Z}$ **und** $21 = 7 \cdot 3$ **gilt** $\exists k \in \mathbb{Z} : 21 = k \cdot 3$ und damit $(3|21)$.

Im Folgenden werden wir Beweise immer in grauen Kästen angeben, wobei wir die ausführlichste Form der neu gelernten Beweisschritte fett drucken mit dem Hinweis Idealform am Seitenrand und einem Verweis auf die zugehörige Merkregel. Außerdem werden die Schritte immer mit Merkregeln kenntlich gemacht:

Merkregel $\exists_N$: Um eine Existenzaussage nachzuweisen, geben wir ein Objekt an, das tatsächlich die Bedingung der Existenzaussage erfüllt.

Wenn es sich um eine Merkregel für den Nachweis eines Aussagetyps handelt, so benutzen wir N als Index. Bei Merkregeln zur Benutzung verwenden wir ein B als Index.

Eine weitere Quelle von Existenzaussagen ergibt sich für uns aus der kleiner-Relation. Sind nun a, b zwei ganze Zahlen, so sagen wir, dass *a kleiner als b ist* bzw. *b ist größer als a*, wenn sich a und b um eine natürliche Zahl n unterscheiden, wenn also $a + n = b$ ist. Genauer halten wir fest

Ausdruck	**Aussprache**	**Bedingung**	**Abkürzung für**
$a < b$	a ist kleiner als b	$a, b \in \mathbb{Z}$	$\exists n \in \mathbb{N} : a + n = b$
$b > a$	b ist größer als a	$a, b \in \mathbb{Z}$	$a < b$

Als Beispiel weisen wir nach, dass $-5 < -3$ gilt.

Die Zahl $2 \in \mathbb{N}$ erfüllt $-5 + 2 = -3$ und damit gilt $\exists n \in \mathbb{N} : -5 + n = -3$. Als Abkürzung können wir $-5 < -3$ schreiben.

Eine weitere Existenzaussage ist

$$\exists n \in \mathbb{N} : n > 0.$$

Obwohl dies offensichtlich erscheint, müssen wir auch diese Aussage beweisen.

Wir weisen nach, dass

$$1 > 0$$

gilt: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$0 + n = 1,$$

nämlich $n = 1$, also gilt $1 > 0$. Da $1 \in \mathbb{N}$ ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$. ∎

Das kleine Quadrat bedeutet, dass hier ein Beweis endet. Andere Abschlussmarken sind □ oder *qed* für *quod erat demonstrandum* – was zu beweisen war.

Aufgabe 1.1. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen gelten, indem Sie das Vorgehen aus dem vorangegangenen Abschnitt wiederholen und am Ende einen Text entsprechend dem grau hinterlegten Beweis angeben.

(i) $14|98$

(ii) $1 < 2$

(iii) $\exists x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : \exists z \in \mathbb{Z} : x^2 + y^2 = z^2$

Aufgabe 1.2. Formulieren Sie folgende umgangssprachlichen Aussagen als mathematische Existenzaussagen und beweisen Sie deren Gültigkeit:

(i) Es gibt eine Zahl, deren Quadrat gleich 4 ist.

(ii) Es gibt eine Quadratzahl von der Form $3 \cdot n + 1$ mit einer natürlichen Zahl n.

Aufgabe 1.3. Die Namen von Platzhaltern in Existenzaussagen sind willkürlich und können ausgetauscht werden, ohne den Sinn der Aussage zu verändern. Führen Sie in der Existenzaussage

$$\exists a \in \mathbb{N} : \exists b \in \mathbb{N} : \exists c \in \mathbb{N} : a^2 + b^2 = c^2$$

folgende Namensersetzungen durch

(i) $a \to u, b \to v, c \to w$

(ii) $a \to c, b \to a, c \to b$

Aufgabe 1.4. Welche der folgenden Existenzaussagen können allein durch Namensänderung in die gleiche Form gebracht werden?

(i) $\exists u \in \mathbb{Z} : \exists v \in \mathbb{Z} : \exists w \in \mathbb{Z} : u + v = v + w$

(ii) $\exists v \in \mathbb{Z} : \exists u \in \mathbb{Z} : \exists w \in \mathbb{Z} : u + v = v + w$

(iii) $\exists v \in \mathbb{Z} : \exists u \in \mathbb{Z} : \exists w \in \mathbb{Z} : u + v = w + v$

(iv) $\exists u \in \mathbb{Z} : \exists v \in \mathbb{Z} : \exists w \in \mathbb{Z} : v + u = u + w$

(v) $\exists v \in \mathbb{Z} : \exists w \in \mathbb{Z} : \exists u \in \mathbb{Z} : u + w = w + v$

(vi) $\exists w \in \mathbb{Z} : \exists u \in \mathbb{Z} : \exists v \in \mathbb{Z} : w + u = u + v$

(vii) $\exists w \in \mathbb{Z} : \exists u \in \mathbb{Z} : \exists v \in \mathbb{Z} : u + w = w + v$

(viii) $\exists w \in \mathbb{Z} : \exists v \in \mathbb{Z} : \exists u \in \mathbb{Z} : u + v = v + w$

(ix) $\exists w \in \mathbb{Z} : \exists u \in \mathbb{Z} : \exists v \in \mathbb{Z} : w + u = u + v$

(x) $\exists u \in \mathbb{Z} : \exists v \in \mathbb{Z} : \exists w \in \mathbb{Z} : v + u = w + u$

1.2 Für-alle-Aussagen

Neben Existenzaussagen gibt es sogenannte *für-alle-Aussagen*. Diese benutzen wir zur Formulierung von *Regeln*, z. B. haben wir folgende Regel

Jede natürliche Zahl ist größer als 0.

Diese Aussage notieren wir mit mathematischen Symbolen als

$$\forall n \in \mathbb{N} : n > 0. \tag{1.1}$$

Hier benutzen wir den sogenannten All-Quantor $\forall$ (ein auf dem Kopf gestelltes A). Die obige Aussage können wir auch lesen als

Für alle natürlichen Zahlen n gilt: n ist größer als 0.

Idealform $\forall_N$

Wir gehen von $n \in \mathbb{N}$ aus und weisen $n > 0$ nach. Da $0 + n = n$ gilt, gilt somit

$$\exists k \in \mathbb{N} : 0 + k = n,$$

mit n anstelle des Platzhalters k. ∎

Merkregel $\forall_N$: Um eine für-alle-Aussage nachzuweisen, gehen wir von einem Objekt mit der angegebenen Elementeigenschaft aus und zeigen, dass es die Aussage hinter dem Doppelpunkt erfüllt.

Alle Rechengesetze, die Sie aus der Schule kennen, lassen sich als für-alle-Aussagen formulieren. Wir werden diese Regeln im Weiteren häufig benutzen und wollen sie hier als *Axiome* einführen. Dabei ist ein Axiom eine Aussage, die ohne mathematische Begründung gilt. Axiome bilden Ausgangspunkte von Theorien. Hinsichtlich der Rechenregeln ganzer Zahlen haben wir folgende Axiome: Die ersten drei besagen, dass die ganzen Zahlen bezüglich Summen-, Negation- und Produktbildung abgeschlossen sind:

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : (x + y) \in \mathbb{Z} \tag{1.2}$$
$$\forall x \in \mathbb{Z} : (-x) \in \mathbb{Z} \tag{1.3}$$
$$\forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : (x \cdot y) \in \mathbb{Z}. \tag{1.4}$$

Die Abgeschlossenheit bzgl. plus und mal gilt dabei auch für die natürlichen Zahlen

$$\forall x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : (x + y) \in \mathbb{N} \tag{1.5}$$
$$\forall x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : (x \cdot y) \in \mathbb{N}. \tag{1.6}$$

Die nächsten beiden Rechenregeln drücken die Kommutativität der Operationen aus, dass also die Reihenfolge der beiden Argumente keine Rolle spielt:

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x + y = y + x \tag{1.7}$$
$$\forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x \cdot y = y \cdot x \tag{1.8}$$

Die nächsten beiden Rechenregeln bedeuten die Assoziativität der Operationen, d.h. eine Klammerung spielt keine Rolle:

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : \forall z \in \mathbb{Z} : x + (y + z) = (x + y) + z \tag{1.9}$$
$$\forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : \forall z \in \mathbb{Z} : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z. \tag{1.10}$$

Die nächsten beiden Axiome (Neutralitätsgesetze) besagen, dass 0 und 1 neutrale Elemente bezüglich der Addition bzw. Multiplikation sind

$$\forall x \in \mathbb{Z} : 0 + x = x \tag{1.11}$$
$$\forall x \in \mathbb{Z} : 1 \cdot x = x \tag{1.12}$$

Das nächste Axiom (Inversenaxiom) beschreibt die Wirkung der Subtraktion

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x - x = 0 \tag{1.13}$$

Das negierte Element $(-x)$ nennen wir hier auch das inverse Element zu x.

Ferner gilt das Distributivgesetz

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : \forall z \in \mathbb{Z} : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \tag{1.14}$$

Um die Anzahl von Klammern gering zu halten, wird Punkt- vor Strichrechnung vereinbart, also $x \cdot y + x \cdot z$ ist eine Abkürzung für $(x \cdot y) + (x \cdot z)$.

Wie wir aus den Axiomen weitere Rechengesetze ableiten können, zeigt das folgende Beispiel. Neben der Linksdistributivität (1.14) gilt nämlich auch die Rechtsdistributivität:

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : \forall c \in \mathbb{Z} : (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c. \tag{1.15}$$

Wir gehen von $a \in \mathbb{Z}$ aus und zeigen

$$\forall b \in \mathbb{Z} : \forall c \in \mathbb{Z} : (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Dazu gehen wir von $b \in \mathbb{Z}$ aus und zeigen

$$\forall c \in \mathbb{Z} : (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Dazu gehen wir von $c \in \mathbb{Z}$ aus und zeigen

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Im Folgenden werden wir an solchen Stellen kurz sagen: wir gehen von $a, b, c \in \mathbb{Z}$ aus und zeigen

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Um die zugesicherte Linksdistributivität benutzen zu können, müssen wir zuerst die korrekte Form herstellen, bei der die Summe $(a + b)$ rechts vom Malpunkt steht. Dies können wir mit dem Kommutativgesetz erreichen, das auch für $(a + b)$ und c gilt, sofern $(a + b)$ wieder eine ganze Zahl ist, was von Axiom (1.2) zugesichert wird. Die Argumentation verläuft damit so:

Wir wenden (1.2) auf $a \in \mathbb{Z}$ anstelle des Platzhalters x an und erhalten damit $\forall y \in \mathbb{Z} : (a + y) \in \mathbb{Z}$.

Idealform
$\forall_B$

Nun wenden wir diese für-alle Aussage auf $b \in \mathbb{Z}$ anstelle des Platzhalters y an und erhalten $(a+b) \in \mathbb{Z}$. Auch hier werden wir uns im Weiteren einer Kurzform bedienen, bei der wir (1.2) direkt auf $a, b \in \mathbb{Z}$ anwenden, um auf $(a+b) \in \mathbb{Z}$ zu schließen. Wenden wir in diesem Sinne (1.8) auf $(a + b) \in \mathbb{Z}$ und $c \in \mathbb{Z}$ anstelle der Platzhalter x, y an, so erhalten wir $(a + b) \cdot c = c \cdot (a + b)$. Nun wenden wir das Distributivgesetz (1.14) auf $c, a, b \in \mathbb{Z}$ an und erhalten

$$c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b.$$

Erneute Anwendung von (1.8) auf c, a bzw. c, b liefert

$$c \cdot a = a \cdot c \text{ und } c \cdot b = b \cdot c.$$

Durch Ersetzen gleicher Ausdrücke ergibt sich nun

$$(a + b) \cdot c = c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b = a \cdot c + b \cdot c,$$

was der zu beweisenden Aussage entspricht. ■

Merkregel $\forall_B$: Eine gültige für-alle-Aussage kann auf jedes Objekt, welches Element der zu Grunde liegenden Menge ist, angewendet werden, d.h. die Aussage hinter dem Doppelpunkt gilt auch mit dem Objekt anstelle des Platzhalters.

Aufgabe 1.5. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen gelten, indem Sie einen Beweis wie in den grau hinterlegten Beispielen angeben.

(i) $\forall a \in \mathbb{Z} : 1|a$

(ii) $\forall a \in \mathbb{Z} : a|a$

(iii) $\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : a|(a \cdot b)$

Aufgabe 1.6. Formulieren Sie die folgenden Bruchrechenregeln als für-alle-Aussagen:

(i) Gemeinsame Faktoren in Zähler und Nenner können gekürzt werden.

(ii) Zähler und Nenner können mit der gleichen Zahl erweitert werden, ohne den Wert des Bruchs zu ändern.

(iii) Division durch einen Bruch entspricht Multiplikation mit dem Kehrbruch.

(iv) Division durch 1 ändert den Wert einer Zahl nicht.

Aufgabe 1.7. Geben Sie mit Hilfe des Distributivgesetzes und anderer Rechengesetze der natürlichen Zahlen ein Verfahren an mit dem wir ein beliebiges Produkt aus dem Großen Einmaleins über das Kleine Einmaleins berechnen können.

Aufgabe 1.8. Beweisen Sie durch sorgfältige Anwendung der Rechenaxiome die folgenden Regeln

(i) $\forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : (x - y) \in \mathbb{Z}$

(ii) $\forall x \in \mathbb{Z} : x + 0 = x$

(iii) $\forall x \in \mathbb{Z} : x \cdot 1 = x$

(iv) $\forall x \in \mathbb{Z} : 0 - x = -x$

(v) $\forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : \forall z \in \mathbb{Z} : (x + y) - z = x + (y - z)$

Aufgabe 1.9. Zeigen Sie

$$\forall a \in \mathbb{Z} : -a = (-1) \cdot a.$$

Aufgabe 1.10. Zeigen Sie

$$\forall a \in \mathbb{Z} : a = -(-a).$$

Aufgabe 1.11. Beweisen Sie durch sorgfältige Anwendung der Rechenaxiome die binomischen Formeln. Wir benutzen hier $a + b + c$ als Abkürzung für $(a + b) + c$, $a - b + c$ als Abkürzung für $(a - b) + c$ und $a \cdot b \cdot c$ als Abkürzung für $(a \cdot b) \cdot c$.

(i) $\forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : (x + y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$

(ii) $\forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : (x - y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2$

1.3 Implikationen

Aus einer Aussage können wir eine weitere Aussage folgern. Zum Beispiel:

Wenn 4 eine natürliche Zahl n teilt, dann teilt 2 auch n.

Wir notieren dies wie folgt

$$\forall n \in \mathbb{N} : (4|n) \Rightarrow (2|n).$$

Es handelt sich hier um eine sogenannte *wenn-dann-Aussage*, oder kurz eine *Implikation*. Wir halten fest

Ausdruck	**Aussprache**	**Bedingung**	**Abkürzung für**
$A \Rightarrow B$	wenn A, dann B A impliziert B	A, B ist Aussage	–

Der direkte Nachweis von

$$A \Rightarrow B$$

heißt auch passend *direkter Beweis*. Wie der Name schon vermuten lässt, gibt es auch *indirekte Beweise* (auch *Widerspruchsbeweise* genannt). Auf indirekte Beweise gehen wir später ein.

Zur Illustration beweisen wir nun

$$\forall n \in \mathbb{N} : (4|n) \Rightarrow (2|n).$$

Idealform $\Rightarrow_N$

Zum Nachweis der für-alle-Aussage gehen wir von $n \in \mathbb{N}$ aus. **In einem direkten Beweis nehmen wir $(4|n)$ an und zeigen $(2|n)$.** Die Langform von $(4|n)$ ist

$$\exists k \in \mathbb{Z} : n = k \cdot 4.$$

Idealform $\exists_B$

Ausgehend von einem solchen k erhalten wir ferner

$$n = k \cdot 4 = (k \cdot 2) \cdot 2 = \ell \cdot 2 \text{ mit } \ell := k \cdot 2.$$

Mit Axiom (1.4) ist ℓ das Produkt ganzer Zahlen und daher selbst eine ganze Zahl. Somit gibt es ein $\ell \in \mathbb{Z}$ mit $n = \ell \cdot 2$, dies beweist $(2|n)$. ∎

Merkregel $\Rightarrow_N$: Um direkt nachzuweisen, dass eine Aussage A eine Aussage B impliziert, gehen wir von A aus und führen eine Kette von zulässigen Beweisschritten aus, die letztlich zu B führt.

Merkregel $\exists_B$: Wir verwenden eine gültige Existenzaussage durch Vergabe eines Namens für ein Objekt, das die zugesicherten Eigenschaften besitzt. Dieses Objekt kann anschließend verwendet werden.

Bezüglich der Gleichheit formulieren wir weitere Axiome (neben denen der Rechengesetze). Gleichheit ist eine reflexive Eigenschaft, d.h.

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x = x. \tag{1.16}$$

Gleichheit ist eine symmetrische Eigenschaft, d.h.

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x = y \Rightarrow y = x. \tag{1.17}$$

Die Symmetrie (1.17) erlaubt uns bei Gleichheit $x = y$ den Platzhalter x durch y zu ersetzen und umgekehrt.

Merkregel $=_B$: Gilt $x = y$, so dürfen wir x durch y ersetzen und umgekehrt.

Die nächsten beiden Axiome besagen, dass die Addition bzw. Multiplikation mit derselben ganzen Zahl auf beiden Seiten einer Gleichung „gleichungsstabil“ sind, d.h.

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : \forall c \in \mathbb{Z} : (a = b) \Rightarrow (c + a = c + b) \tag{1.18}$$

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : \forall c \in \mathbb{Z} : (a = b) \Rightarrow (c \cdot a = c \cdot b). \tag{1.19}$$

Diese beiden Axiome (1.18) und (1.19) benutzen wir zum Umformen von Gleichungen.

Mit Hilfe dieser und den Rechenregeln zeigen wir nun

$$\forall a \in \mathbb{Z} : x \cdot 0 = 0. \tag{1.20}$$

Wir gehen von $x \in \mathbb{Z}$ aus und wenden zunächst (1.11) auf $0 \in \mathbb{Z}$ an, um

$$0 + 0 = 0$$

zu erhalten. Damit gilt mit (1.7) und (1.19)

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0).$$

Anwendung des Distributivgesetzes (1.14) auf $x, 0, 0$ auf der rechten Seite liefert nun

$$x \cdot 0 = x \cdot 0 + x \cdot 0.$$

Addition von $-(x \cdot 0)$ auf beiden Seiten ergibt mit (1.18)

$$x \cdot 0 - x \cdot 0 = (x \cdot 0 + x \cdot 0) + (-(x \cdot 0)).$$

Wenden wir jetzt das Assoziativgesetz (1.9) auf $x \cdot 0, x \cdot 0, -(x \cdot 0)$ an, so folgt weiter

$$x \cdot 0 - x \cdot 0 = x \cdot 0 + (x \cdot 0 - x \cdot 0).$$

Eine Anwendung von (1.13) auf $x \cdot 0$ zeigt nun

$$x \cdot 0 - x \cdot 0 = 0 \text{ und damit insgesamt } 0 = x \cdot 0 + 0.$$

Das Kommutativgesetz (1.7) angewendet auf $x \cdot 0, 0$ ergibt

$$x \cdot 0 + 0 = 0 + x \cdot 0$$

und eine Anwendung von (1.11) auf $x \cdot 0$ ergibt

$$0 + x \cdot 0 = x \cdot 0.$$

Insgesamt erhalten wir damit $0 = x \cdot 0$. ∎

Wir führen eine übliche Abkürzung ein

Ausdruck	Aussprache	Bedingung	Abkürzung für
a^2	a Quadrat	$a \in \mathbb{Z}$	$a \cdot a$

und zeigen

$$(-1)^2 = 1. \tag{1.21}$$

Anwendung des Inversenaxiom (1.13) auf 1 ergibt

$$0 = 1 - 1 = 1 + (-1).$$

Multiplikation mit (-1) von links liefert

$$(-1) \cdot 0 = (-1) \cdot (1 + (-1))$$

und Anwendung des gerade bewiesenen Satzes (1.20) auf (-1) zeigt

$$(-1) \cdot 0 = 0.$$

Wenden wir nun das Distributivgesetz (1.14) auf $(-1), 1, (-1)$ an, so finden wir insgesamt

$$0 = (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1).$$

Mit dem Kommutativitätsaxiom der Multiplikation und der Neutralitätseigenschaft der 1 folgt weiter

$$(-1) \cdot 1 = 1 \cdot (-1) = -1$$

und somit

$$0 = -1 + (-1)^2.$$

Addition von 1 auf beiden Seiten ergibt nach Anwendung des Assoziativitätsaxioms

$$1 + 0 = 1 + (-1 + (-1)^2) = (1 - 1) + (-1)^2.$$

Mit weiteren Axiom-Anwendungen folgt hieraus

$$1 = 0 + (-1)^2 = (-1)^2. \quad \blacksquare$$

Um die Anwendung geltender Implikationen zu demonstrieren, zeigen wir zunächst den folgenden Satz

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : \forall c \in \mathbb{Z} : (a < b) \Rightarrow (a + c < b + c) \tag{1.22}$$

Wir gehen von ganzen Zahlen a, b und c mit $a < b$ aus. Die Langform der Aussage $a < b$ ist:

$$\exists n \in \mathbb{N} : a + n = b.$$

Die Gleichheit bleibt bei Addition des gleichen Summanden auf beiden Seiten erhalten. Somit gilt

$$(a + n) + c = b + c.$$

Mehrfache Anwendung des Assoziativgesetzes (1.9) und das Kommutativgesetz liefern

$$(a + n) + c \overset{\text{AG}}{=} a + (n + c) \overset{\text{KG}}{=} a + (c + n) \overset{\text{AG}}{=} (a + c) + n = b + c.$$

Also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(a + c) + n = b + c$, d.h. $a + c < b + c$. ∎

Die umgekehrte Implikation

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : \forall c \in \mathbb{Z} : (a + c < b + c) \Rightarrow (a < b) \tag{1.23}$$

folgt nun so

Wir gehen von $a, b, c \in \mathbb{Z}$ aus. Zum Nachweis der Implikation nehmen wir $a + c < b + c$ an. Die vorangegangene für-alle-Aussage angewendet auf $a+c, b+c, -c$ ergibt

$$(a + c < b + c) \Rightarrow (a + c) - c < (b + c) - c.$$

Da $a + c < b + c$ erfüllt ist, gilt auch

Idealform $\Rightarrow_B$

$$(a + c) - c < (b + c) - c.$$

Durch Umklammern, Inversionsaxiom und Neutralität folgt dann

$$a = a + 0 = a + (c - c) = (a + c) - c < (b + c) - c = b + (c - c) = b + 0 = b. \quad ∎$$

Merkregel $\Rightarrow_B$: Wenn eine Implikation $A \Rightarrow B$ gilt, dann bedeutet die Gültigkeit der Aussage A auch schon die von B.

Ein typischer Anfängerfehler ist anzunehmen, dass aus $(A \Rightarrow B)$ auch $(B \Rightarrow A)$ folgt. Wir schauen uns hierzu folgendes Beispiel an – offenbar gilt

$$\forall n \in \mathbb{Z} : (n = 2) \Rightarrow (n^2 = 4).$$

Die Umkehrung

$$\forall n \in \mathbb{Z} : (n^2 = 4) \Rightarrow (n = 2)$$

ist aber falsch.

Aufgabe 1.12. Zeigen Sie, dass die folgende Aussage gilt

$$\forall n \in \mathbb{Z} : (2|n) \Rightarrow (2|n^2).$$

Aufgabe 1.13. Zeigen Sie

$$\forall a \in \mathbb{N} : \forall b \in \mathbb{N} : a < b \Rightarrow a^2 < b^2.$$

Aufgabe 1.14. Beweisen Sie die folgende Aussage

$$\forall x \in \mathbb{Z} : (x > 0) \Rightarrow (x \in \mathbb{N})$$

Aufgabe 1.15. Zeigen Sie

$$\forall x \in \mathbb{Z} : (x > 0) \Rightarrow (-x < 0)$$

Aufgabe 1.16. Beweisen Sie die folgende Aussage

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : \forall n \in \mathbb{N} : (a < b) \Rightarrow ((n \cdot a) < (n \cdot b))$$

1.4 Und-Aussagen

Bei einer Implikation haben wir zwei Aussagen bereits logisch miteinander verknüpft: Aus der Gültigkeit der einen Aussage folgt die Gültigkeit der anderen.

Wir können nun aus zwei Aussagen A und B eine weitere neue Aussage bilden; diese soll nur dann wahr sein, wenn A und B beide wahr sind. Für diese neue Aussage schreiben wir $A \wedge B$ und lesen sie als *A und B*. Wir halten fest

Ausdruck	**Aussprache**	**Bedingung**	**Abkürzung für**
$A \wedge B$	A und B	A, B ist Aussage	–

Das Verknüpfungszeichen $\wedge$, ein umgedrehtes v, ist der sogenannte *und-Junktor*. Zu $A \wedge B$ sagen wir auch *Konjunktion von A und B*.

Merkregel $\wedge_N$: Um eine und-Aussage nachzuweisen, zeigen wir, dass beide Aussagen gelten.

Beispielsweise gelten $(2|4)$ und $(7|21)$. **Da beide Aussagen wahr sind, ist auch** $(2|4) \wedge (7|21)$ **wahr.** Idealform $\wedge_N$

Als Beispiel zeigen wir, dass Teilbarkeit eine transitive Eigenschaft ist, d.h., wenn $(a|b)$ und $(b|c)$, dann gilt auch $(a|c)$. Dies können wir wie folgt notieren

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : \forall c \in \mathbb{Z} : ((a|b) \wedge (b|c)) \Rightarrow (a|c). \tag{1.24}$$

Wir gehen von $a, b, c \in \mathbb{Z}$ aus. Zum Nachweis der Implikation nehmen wir an, dass $((a|b) \wedge (b|c))$ gilt. **Damit gelten** $(a|b)$ **und** $(b|c)$**.** In Langform stehen diese Aussagen für Idealform $\wedge_B$

$$\exists k \in \mathbb{Z} : b = k \cdot a \text{ und } \exists k \in \mathbb{Z} : c = k \cdot b.$$

Da die Platzhalter identisch sind, können wir bei der Namenswahl für entsprechende Beispiele nicht einfach den Platzhalternamen benutzen, da sonst der gleiche Name in unserem Beweis für möglicherweise unterschiedliche Objekte stehen würde. In der Existenzaussage $\exists k \in \mathbb{Z} : b = k \cdot a$ wählen wir daher h und in $\exists k \in \mathbb{Z} : c = k \cdot b$ den Namen ℓ, d.h.

$$b = h \cdot a \text{ und } c = \ell \cdot b.$$

Wir setzen nun $b = h \cdot a$ in $c = \ell \cdot b$ ein und erhalten

$$c = \ell \cdot b = \ell \cdot (h \cdot a) = (\ell \cdot h) \cdot a = m \cdot a$$

mit $m := \ell \cdot h$. Da ℓ und h ganze Zahlen sind, ist wegen der Abgeschlossenheit der Multiplikation ganzer Zahlen (Axiom (1.4)) auch m eine ganze Zahl. Also gilt

$$\exists m \in \mathbb{Z} : c = m \cdot a,$$

d.h. $(a|c)$. ■

Merkregel $\wedge_B$: Bei einer gültigen und-Aussage sind beide Aussagen wahr.

Aufgabe 1.17. Zeigen Sie

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : \forall c \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : (a|b) \wedge (a|c) \Rightarrow a|(xb + yc).$$

Aufgabe 1.18. Zeigen Sie

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : (a > 0) \wedge (b > 0) \Rightarrow (a + b) > 0.$$

Aufgabe 1.19. Zeigen Sie

$$\exists n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : \exists \ell \in \mathbb{N} : (3n + 1 = k^2) \wedge (4n + 1 = \ell^2).$$