1.5 Äquivalenz von Aussagen

Wir betrachten allgemein zwei Aussagen A und B. Wenn sowohl $(A \Rightarrow B)$ als auch $(B \Rightarrow A)$ gelten, so sagen wir, dass *A und B äquivalent sind* und schreiben $A \Leftrightarrow B$. Wir haben also

Ausdruck	**Aussprache**	**Bedingung**	**Abkürzung für**
$A \Leftrightarrow B$	A und B sind äquivalent	A, B ist Aussage	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

Aus den Merkregeln zur und-Aussage ergeben sich sofort entsprechende Merkregeln zur Äquivalenz:

Merkregel $\Leftrightarrow_N$: Um nachzuweisen, dass zwei Aussagen A und B äquivalent sind, sind die Nachweise von $(A \Rightarrow B)$ und $(B \Rightarrow A)$ erforderlich.

Merkregel $\Leftrightarrow_B$: Wenn eine Äquivalenzaussage $A \Leftrightarrow B$ gilt, dann kann A durch B ersetzt werden und umgekehrt.

Als Beispiel beweisen wir die folgende Äquivalenz

$$\forall a \in \mathbb{Z} : (a > 0) \Leftrightarrow ((-a) < 0). \tag{1.25}$$

Wir gehen von $a \in \mathbb{Z}$ aus. Anwendung des Satzes aus Aufgabe 1.15 auf a liefert $(a > 0) \Rightarrow (-a < 0)$. Für die umgekehrte Implikation nehmen wir an $(-a) < 0$, d.h. es gibt eine Zahl $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$(-a) + k = 0.$$

Addition von a auf beiden Seiten liefert

$$k = 0 + a, \text{ d.h. } 0 + k = a.$$

Somit gibt es eine natürliche Zahl k mit

$$0 + k = a,$$

d.h. $a > 0$. **Da beide Implikationen gelten, gilt auch die Äquivalenz** $(a > 0) \Leftrightarrow (-a < 0)$. ■

Idealform $\Leftrightarrow_N$

Aufgabe 1.20. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten

(i) $\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : (a < b) \Leftrightarrow ((-a) > (-b))$

(ii) $\forall x \in \mathbb{Z} : (x \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (x > 0)$

1.6 Nicht-Aussagen

Für eine Aussage A bezeichnet $\neg A$ ihre Negation, wir lesen $\neg A$ als *Nicht* A. Die Aussage $\neg A$ ist wahr, wenn A falsch ist.

Da die Aussage $(3 = 5)$ falsch ist, ist $\neg(3 = 5)$ wahr. Üblicherweise schreiben wir für $\neg(a = b)$ kurz $a \neq b$ und sagen a *ist ungleich* b. Es gilt also $3 \neq 5$.

Entsprechend bedeutet $\neg(n|m)$, dass n die Zahl m nicht teilt. Hierfür schreiben wir kurz $n \nmid m$.

Weiter bedeutet $\neg(x \in A)$, dass x kein Element der Menge A ist, die Kurzschreibweise hierfür ist $x \notin A$.

Wir halten also fest

Ausdruck	**Aussprache**	**Bedingung**	**Abkürzung für**
$\neg A$	Nicht A	A ist Aussage	–
$a \neq b$	a ungleich b	keine	$\neg(a = b)$
$n \nmid m$	n teilt nicht m	$n, m \in \mathbb{Z}$	$\neg(n\|m)$
$x \notin A$	x ist kein Element von A	x ist Element, A ist Menge	$\neg(x \in A)$

Da mathematische Aussagen immer einen der beiden Wahrheitswerte *wahr* oder *falsch* haben und da die Negation einer Aussage wahr ist, wenn diese falsch ist und umgekehrt ergibt sich

$$A \Leftrightarrow \neg(\neg A).$$

Wir halten fest

Merkregel Doppelte Negation: Die doppelte Negation einer Aussage ist äquivalent zu der eigentlichen Aussage.

Zum Nachweis von $\neg A$ dient der *Beweis durch Widerspruch*: Wir nehmen an, dass A wahr ist. Wenn dann durch korrektes logisches Schließen ein Widerspruch entsteht (d.h. wenn eine Aussage abgeleitet werden kann, die gleichzeitig mit ihrem Gegenteil gilt), dann kann A nicht gelten. Es muss somit das Gegenteil $\neg A$ zutreffen. Wir haben also $\neg A$ *indirekt* nachgewiesen.

Merkregel $\neg_N$: Die Negation einer Aussage A kann nachgewiesen werden durch Ableiten eines Widerspruchs aus der Annahme A.

Als Beispiel betrachten wir folgende Aussage

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : a < b \Rightarrow a \neq b. \tag{1.26}$$

Idealform $\neg_N$

Zum Nachweis gehen wir von Objekten $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a < b$ aus. **In einem indirekten Beweis nehmen wir an**, dass $a = b$ gilt. Da $a < b$ gilt, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $a + n = b$ gilt. Wegen $(a = b)$ und $(a + n = b)$ folgt daher durch Gleichsetzen der jeweiligen linken Seiten

$$a = b = a + n, \text{d.h. } n = 0.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $n \in \mathbb{N}$, weil nun sowohl $0 \in \mathbb{N}$ als auch $0 \notin \mathbb{N}$ gilt.
■

Mit dem indirekten Beweis kann man die etwas ungewohnte Regel begründen, dass in einer widersprüchlichen Situation jede beliebige Aussage wahr ist. Die Argumentation funktioniert dabei unabhängig davon, welche Aussage A widersprüchlich ist, d.h. zusammen mit ihrem Gegenteil gilt. Diesen immer gleichen Beweis nennen wir auch eine **Beweisschablone**.
Wir gehen von einer Aussage A aus, die zusammen mit ihrem Gegenteil $(\neg A)$ gilt und von einer Aussage B. In einem indirekten Beweis gehen wir von $(\neg B)$ aus. Da A und $(\neg A)$ gilt, liegt ein Widerspruch vor. Es gilt somit $\neg(\neg B)$. Dies ist aber äquivalent zu B, so dass auch B gilt. Wir fassen diese Überlegung in einer Merkregel zusammen:

Merkregel „Aus Falschem folgt alles“: Aus einer falschen Aussage kann jede beliebige Aussage gefolgert werden.

Bei Vorliegen eines Widerspruchs benutzen wir das $\lightning$-Symbol.

Aufgabe 1.21. Zeigen Sie indirekt

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : (x^2 + y = 13) \wedge (y \neq 4) \Rightarrow x \neq 3.$$

Aufgabe 1.22. Zeigen Sie

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : a > b \Rightarrow a \neq b.$$

Aufgabe 1.23. Es seien A, B und C Aussagen. Gilt folgende Aussage

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \quad ?$$

Beweisen Sie Ihre Antwort.

1.7 Oder-Aussagen

Wir betrachten wieder zwei Aussagen A und B. Während die und-Aussage $A \wedge B$ wahr ist, wenn beide Aussagen A und B wahr sind, ist die oder Aussage $A \vee B$ wahr, wenn *mindestens* eine der Aussagen A und B wahr ist. So ist die oder-Aussage zum Beispiel $((3|21) \vee (2|11))$ wahr, denn $(3|21)$ ist wahr. $A \vee B$ lesen wir als *A oder B*. Zur Oder-Verknüpfung sagen wir auch *Disjunktion*.

Merkregel $\vee_N$: Um nachzuweisen, dass eine oder-Aussage wahr ist, zeigen wir die Gültigkeit von mindestens einer Aussage.

Zu beachten ist, dass es sich hier um ein *einschließendes Oder* handelt. Im täglichen Sprachgebrauch benutzen wir *oder* oft (nicht immer) im Sinne von *entweder oder*, also als *ausschließliches Oder*. Auch hierfür gibt es ein logisches Symbol, welches aber nicht so geläufig ist: $A\Delta B$ steht für *entweder A oder B* und ist wahr, wenn genau eine Aussage wahr ist.

Offenbar gilt

$$A\Delta B \Rightarrow A \vee B,$$

denn wenn genau eine Aussage wahr ist, so ist mindestens eine wahr. Ferner gilt

$$A \wedge B \Rightarrow A \vee B,$$

denn wenn beide Aussagen wahr sind, so ist mindestens eine wahr.

Eine oder-Aussage, die uns oft begegnet, ist ein Ausdruck der Form $a \leq b$, den wir als a *ist kleinergleich* b lesen, wobei a und b ganze Zahlen sind. Sie ist eine Abkürzung für die oder-Aussage $((a < b) \vee (a = b))$. Analog steht der Ausdruck $a \geq b$ für $((a > b) \vee (a = b))$, den wir als a *ist größergleich* b lesen. Z. B. gilt $5 \leq 7$ oder $-10 \geq -11$.

Als Beispiel für den Nachweis einer oder-Aussage betrachten wir

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : a < b \Rightarrow a \leq b. \tag{1.27}$$

Wir gehen von $a, b \in \mathbb{Z}$ aus. Zum Nachweis der Implikation nehmen wir an, dass $a < b$ gilt. **Damit gilt auch** $(a < b) \vee (a = b)$**.** In Kurzform geschrieben bedeutet dies $a \leq b$. ■ Idealform $\vee_N$

Wir halten fest

Ausdruck	**Aussprache**	**Bedingung**	**Abkürzung für**
$A \vee B$	A oder B	A, B ist Aussage	–
$A \Delta B$	entweder A oder B	A, B ist Aussage	$(A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge B)$
$a \leq b$	a kleinergleich b	$a, b \in \mathbb{Z}$	$((a < b) \vee (a = b))$
$a \geq b$	a größergleich b	$a, b \in \mathbb{Z}$	$((a > b) \vee (a = b))$

Nachdem wir gesehen haben, wie wir eine oder-Aussage nachweisen können, schauen wir uns nun an, wie wir aus einer geltenden oder-Aussage $A \vee B$ auf eine andere Aussage C schließt. Während $A \vee B$ besagt, dass mindestens eine der beiden Aussagen gilt, wissen wir im Allgemeinen nicht, welche der beiden Aussagen tatsächlich wahr ist. Wenn C aber sowohl aus A als auch als B folgt, dann spielt dieses Unwissen keine Rolle.

Diese Überlegung ist der Hintergrund für den Beweisschritt mit Namen *Fallunterscheidung*:

- Im ersten Fall gehen wir von A aus und zeigen C.
- Im zweiten Fall gehen wir von B aus und zeigen C.

Sind beide Fälle erfolgreich abgearbeitet, so gilt C.

Merkregel $\vee_B$**:** Um nachzuweisen, dass eine oder-Aussage $A \vee B$ eine weitere Aussage C impliziert, zeigen wir $(A \Rightarrow C)$ und $(B \Rightarrow C)$. Dieser Beweisschritt heißt Fallunterscheidung.

Wir illustrieren die Fallunterscheidung, indem wir die folgende Aussage beweisen

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : a \leq b \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N}_0 : a + n = b). \tag{1.28}$$

Wir gehen von $a, b \in \mathbb{Z}$ aus. Zum Nachweis der Implikation nehmen wir $a \leq b$ an, was in Langform $(a < b) \vee (a = b)$ bedeutet.

Idealform $\vee_B$

- **Im Fall** $a < b$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a + n = b$. Da auch $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, folgern wir $\exists n \in \mathbb{N}_0 : a + n = b$.

Idealform $\vee_B$

- **Im Fall** $a = b$ ist auch $a + 0 = b$. Wegen $0 \in \mathbb{N}_0$ folgern wir wieder $\exists n \in \mathbb{N}_0 : a + n = b$. ∎

Aufgabe 1.24. Zeigen Sie

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : a \leq b \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}_0 : a + n = b).$$

Aufgabe 1.25. Geben Sie eine Beweisschablone für folgende Nutzungsregel an: Um nachzuweisen, dass eine Aussage $(A \vee B) \vee C$ eine weitere Aussage D impliziert, zeigen wir $(A \Rightarrow D), (B \Rightarrow D)$ und $(C \Rightarrow D)$.

Aufgabe 1.26. Geben Sie eine Beweisschablone dafür an, dass die $\vee$-Verknüpfung assoziativ ist, d.h. für Aussagen A, B und C gilt

$$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C).$$

Aufgabe 1.27. Geben Sie eine Beweisschablone dafür an, dass die $\wedge$-Verknüpfung assoziativ ist, d.h. für Aussagen A, B und C gilt

$$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C).$$

Eine weitere Möglichkeit eine Menge anzugeben, ist die Angabe von Bedingungen. Wir illustrieren dies anhand der Menge der ganzen Zahlen – diese lässt sich auch wie folgt angeben

$$\mathbb{Z} = \{m : ((m \in \mathbb{N}) \vee (m = 0)) \vee (-m \in \mathbb{N})\}. \tag{1.29}$$

m ist also ein Element von $\mathbb{Z}$, wenn m die Bedingung hinter dem Doppelpunkt, also $((m \in \mathbb{N}) \vee (m = 0)) \vee (-m \in \mathbb{N})$, erfüllt. Dies können wir auch als Regel formulieren:

$$\forall m : m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow ((m \in \mathbb{N}) \vee (m = 0)) \vee (-m \in \mathbb{N}). \tag{1.30}$$

Eine Menge kann auch mit Elementbedingung angegeben werden, z. B. bedeutet

$$\mathbb{N}_{\geq 7} := \{m \in \mathbb{N} : m \geq 7\}$$

die Menge aller natürlichen Zahlen ≥ 7; die Elementbedingung steht vor dem Doppelpunkt. Elemente aus $\mathbb{N}$ werden hier „ausgesondert“. Die zugehörige für-alle-Aussage ist in diesem Fall

$$\forall m \in \mathbb{N} : m \in \mathbb{N}_{\geq 7} \Leftrightarrow m \geq 7.$$

Wird der Wert eines Ausdrucks für verschiedene Fälle erklärt, so sprechen wir von einem *bedingten Ausdruck*. Als wichtiges Beispiel betrachten wir den *Absolutbetrag* $|x|$ einer ganzen Zahl x. Im Fall $x \geq 0$ ist der Ausdruck $|x|$ durch x selbst und im gegenteiligen Fall $\neg(x \geq 0)$ durch $-x$ gegeben. Den bedingten Ausdruck notieren wir in der Form

$$\begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei wir $|x|$ wie gewohnt als Abkürzung einführen.

Ausdruck	**Aussprache**	**Bedingung**	**Abkürzung für**
$\lvert x \rvert$	Betrag von x	$x \in \mathbb{Z}$	$\begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{sonst} \end{cases}$

Als erstes Beispiel zeigen wir, dass der Absolutbetrag einer ganzen Zahl stets größer oder gleich Null ist:

$$\forall x \in \mathbb{Z} : |x| \geq 0. \tag{1.31}$$

Für den Beweis von (1.31) benutzen wir folgende Hilfsaussage

$$\forall m \in \mathbb{Z} : \neg(m \geq 0) \Rightarrow (m < 0). \tag{1.32}$$

Wir beweisen zunächst (1.32):

Wir gehen von einem Objekt m aus und nehmen an, dass $m \in \mathbb{Z}$ gilt. Wenden wir die Regel (1.30)

$$\forall x \in \mathbb{Z} : ((x \in \mathbb{N}) \vee (x = 0)) \vee ((-x) \in \mathbb{N})$$

auf m an, so können wir mit der resultierenden oder-Aussage eine Fallunterscheidung durchführen.

- Ist $(-m) \in \mathbb{N}$ dann ist wegen $m + (-m) = 0$ der Existenznachweis für $m < 0$ geführt.
- Im Fall $(m \in \mathbb{N}) \vee (m = 0)$ führen wir wieder eine Fallunterscheidung durch.
  - Im Fall $m = 0$ erhalten wir sofort auch $m \geq 0$. Da dies im Widerspruch zur Annahme $\neg(m \geq 0)$ steht, können wir auf $m < 0$ schließen (Merkregel „Aus Falschem folgt alles“).
  - Im Fall $m \in \mathbb{N}$ wissen wir, dass wegen $\forall n \in \mathbb{N} : n > 0$ durch Anwendung auf m zunächst $m > 0$ und damit auch $m \geq 0$ folgt. Erneut gilt in dieser widersprüchlichen Situation jede Aussage und damit auch $m < 0$ (Merkregel „Aus Falschem folgt alles“).

Insgesamt liefern alle Fälle die gleiche Aussage $m < 0$, so dass beide Fallunterscheidungen erfolgreich schließen ■

Bei einer oder-Aussage der Form

$$A \vee (\neg A) \tag{1.33}$$

handelt es sich um eine sogenannte *Tautologie* – eine Aussage, die stets wahr ist.

Merkregel „tertium non datur“: Für jede beliebige Aussage A gilt: $A \vee (\neg A)$, d.h. es gilt A oder es gilt $(\neg A)$, eine dritte Möglichkeit gibt es nicht.

Aus (1.33) bzw. der Merkregel „tertium non datur“ folgt daher

$$\forall x \in \mathbb{Z} : (m \geq 0) \vee \neg(m \geq 0).$$

In Kombination mit (1.32) erhalten wir daher

$$\forall m \in \mathbb{Z} : (m \geq 0) \vee (m < 0). \tag{1.34}$$

Nun beweisen wir (1.31):

Zum Nachweis von
$$\forall x \in \mathbb{Z} : |x| \geq 0$$
gehen wir von einem Objekt $x \in \mathbb{Z}$ aus und müssen $|x| \geq 0$ nachweisen. Basierend auf der oder-Aussage (1.34) führen wir eine Fallunterscheidung durch mit den Fällen $(x \geq 0)$ und $(x < 0)$.

- Im Fall $(x \geq 0)$ liefert der bedingte Ausdruck den Wert x, so dass $|x| = x$ gilt. Wegen $x \geq 0$ ist also auch $|x| \geq 0$.
- Im Fall $(x < 0)$ ist $|x| = -x$. Nach (1.25) gilt $(x < 0) \Leftrightarrow (-x > 0)$. Somit ist $|x| = -x > 0$, d.h. $|x| \geq 0$. ∎

Jede ganze Zahl ist kleinergleich ihrem Absolutbetrag, d.h.
$$\forall a \in \mathbb{Z} : a \leq |a|. \tag{1.35}$$

Wir gehen wieder von einer ganzen Zahl a aus und haben wegen (1.34) zwei Fälle: Im Fall von $a \geq 0$ ist $|a| = a$ und somit $|a| \geq a$. Im Fall von $(a < 0)$ und $|a| = -a$. Wegen $(a < 0)$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass
$$a + k = 0.$$
Addition von $(-a)$ auf beiden Seiten liefert
$$k = -a \Rightarrow 0 + k = -a.$$
Somit gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $0 + k = -a$, d.h. $(0 < -a)$. Wegen $(a < 0) \wedge (0 < -a) \wedge (|a| = -a)$, folgt
$$a < 0 < -a = |a|, \text{ also } |a| > a \Rightarrow |a| \geq a.$$
In beiden Fällen ist also $|a| \geq a$. ∎

In völlig analoger Weise zeigen wir
$$\forall a \in \mathbb{Z} : -a \leq |a|. \tag{1.36}$$

Eine der wichtigsten Ungleichungen ist die sogenannte *Dreiecksungleichung*. Sie besagt, dass der Absolutbetrag einer Summe von ganzen Zahlen stets kleinergleich der Summe der einzelnen Absolutbeträge ist:

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : |a + b| \leq |a| + |b|. \tag{1.37}$$

Zum Nachweis gehen wir von ganzen Zahlen a und b aus. Wir führen eine Fallunterscheidung durch. Wegen (1.34) untersuchen wir die Fälle $(a + b \geq 0)$ und $(a + b < 0)$.

- Im Fall $(a + b \geq 0)$ gilt $|a + b| = a + b$. Mit (1.35) gilt $a \leq |a|$ bzw. $b \leq |b|$. Daraus folgt mit einer Regel über den Umgang mit Ungleichungen (Aufgabe 1.30)
$$|a + b| = a + b \leq |a| + |b|.$$
- Im Fall von $(a + b < 0)$ gilt mit (1.36)
$$|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) \leq |a| + |b|.$$

Also gilt
$$|a + b| \leq |a| + |b|$$
in beiden Fällen. ■

Aufgabe 1.28. Zeigen Sie die folgende Regel
$$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall m \in \mathbb{Z} : (m \geq a) \vee (m < a).$$

Aufgabe 1.29. Zeigen Sie

(i) $\forall a \in \mathbb{Z} : |-a| = |a|$

(ii) $\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

(iii) $\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : |a - b| \geq |a| - |b|$

Aufgabe 1.30. Zeigen Sie die folgenden Regeln für den Umgang mit Ungleichungen:

(i) $\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : \forall c \in \mathbb{Z} : \forall d \in \mathbb{Z} : (a \leq b) \wedge (c \leq d) \Rightarrow (a + c \leq b + d).$

(ii) $\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : \forall n \in \mathbb{N} : (a \leq b) \Rightarrow (n \cdot a \leq n \cdot b)$

(iii) $\forall a \in \mathbb{N} : \forall b \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : (a \leq b) \wedge (m \leq n) \Rightarrow (a \cdot m \leq b \cdot n)$.

1.8 Negationen von Existenz- und für-alle-Aussagen

Negationen von Existenzaussagen stehen im direkten Zusammenhang zu für-alle-Aussagen und umgekehrt. Wir betrachten hierzu die Aussage

$$\neg(\exists n \in \mathbb{N} : n \leq 0),$$

die intuitiv in einem engen Bezug zur für-alle-Aussage

$$\forall n \in \mathbb{N} : n > 0$$

steht. Um diesen Zusammenhang allgemein herauszuarbeiten, gehen wir von einer Nicht-Existenzaussage der Form

$$\neg(\exists x \in M : A(x))$$

aus, wobei $A(x)$ für eine x-abhängige Aussage steht (in unserem Beispiel ist $M = \mathbb{N}$ und $A(x) = (x \leq 0)$). Dann können wir uns in einer Beweisschablone davon überzeugen, dass

$$\forall x \in M : \neg A(x)$$

gilt, d.h.

$$\neg(\exists x \in M : A(x)) \Rightarrow \forall x \in M : \neg A(x).$$

Zum Nachweis der Implikation gehen wir von $\neg(\exists x \in M : A(x))$ aus. Zum Nachweis der für-alle-Aussage gehen wir von $x \in M$ aus. In einem indirekten Beweis nehmen wir an, dass $A(x)$ gilt. Dann gilt aber auch $\exists x \in M : A(x)$. Zusammen mit der Voraussetzung ist dies ein Widerspruch $\lightning$. Folglich gilt $\neg A(x)$, womit die für-alle-Aussage gezeigt ist.

Es gilt auch die Implikation

$$\forall x \in M : \neg A(x) \Rightarrow \neg(\exists x \in M : A(x)).$$

In einem direkten Beweis gehen wir von $\forall x \in M : \neg A(x)$ aus und zeigen die Negationsaussage indirekt. Sei dazu $\exists x \in M : A(x)$ wahr. Wir wählen ein entsprechendes Objekt x und wenden hierauf die für-alle-Aussage an. Es gilt dann sowohl $A(x)$ als auch $\neg A(x) \lightning$. Damit ist $\neg(\exists x \in M : A(x))$ gezeigt. ∎

Insgesamt gilt daher

$$\neg(\exists x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x).$$

Merkregel Existenzaussage negieren: Wir erhalten die Negation einer Existenzaussage, indem wir eine für-alle-Aussage bilden und die Ausgangsaussage negieren.

Wenn eine für-alle-Aussage nicht gilt, dann muss es mindestens ein Element der zugrunde liegenden Menge geben, welches die Eigenschaft nicht hat. Für den Nachweis einer Existenzaussage benutzen wir die Merkregel $\exists_N$, d.h. wir geben ein Beispielobjekt an, welches die Bedingungen der Existenzaussage erfüllt. Ein solches Beispiel heißt dann ein Gegenbeispiel der (nicht geltenden) für-alle-Aussage. Wir fassen zusammen:

Merkregel Existenz eines Gegenbeispiels: Wir erhalten die Negation einer für-alle-Aussage, wenn wir ein Beispiel mit der gegenteiligen Eigenschaft finden.

Zur Illustration der Anwendung der Merkregel „Existenzaussage negieren“ zeigen wir $3 \nmid 22$.

Für den Nachweis machen wir Gebrauch von folgendem Axiom, welches die Struktur der ganzen Zahlen widerspiegelt: Zwischen einer ganzen Zahl n und $n+1$ gibt es keine ganze Zahl, d.h.

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \neg(\exists m \in \mathbb{Z} : (n < m) \wedge (m < n+1)). \tag{1.38}$$

Die Aussage $3 \nmid 22$ ist eine Abkürzung für

$$\neg(\exists k \in \mathbb{Z} : 22 = k \cdot 3).$$

Wie wir oben gesehen haben, ist diese Aussage äquivalent zu

$$\forall k \in \mathbb{Z} : 22 \neq k \cdot 3.$$

Bevor wir die Aussage zeigen, noch weitere Vorüberlegungen: Nach Aufgabe 1.28 gilt

$$\forall a \in \mathbb{Z} : \forall m \in \mathbb{Z} : (m \geq a) \vee (m < a). \tag{1.39}$$

Angewandt auf $a = 8$ und $m = k$ erhalten wir

$$\forall k \in \mathbb{Z} : (k \geq 8) \vee (k < 8). \tag{1.40}$$

Wir führen nun eine Fallunterscheidung gemäß (6.21) durch

- Im Fall $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \geq 8$ gilt mit den Regeln für Ungleichungen (Aufgabe 1.30)

  $$3k \geq 24 > 22.$$

  Mit (1.26) ist wegen $22 < 3k$ auch $22 \neq 3k$. Somit gilt für $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \geq 8$ daher $3k \neq 22$.

- Im Fall $k \in \mathbb{Z}$ mit $k < 8$ folgt mit dem Axiom (1.38) $k \leq 7$. Mit den Regeln für Ungleichungen (Aufgabe 1.30)

  $$3k \leq 21 < 22,$$

  Mit (1.26) ist wegen $22 < 3k$ auch $22 \neq 3k$. Somit gilt für $k \in \mathbb{Z}$ mit $k < 8$ daher $3k \neq 22$. ■

Beide Fälle schließen mit demselben Ergebnis. Mithin gilt

$$\forall k \in \mathbb{Z} : 22 \neq 3k \Leftrightarrow 3 \nmid 22.$$

Dies war zu zeigen. ■

Analog zeigen wir

$$2 \nmid 1. \tag{1.41}$$

Wir wenden (1.39) auf 1 und k anstelle von a und m an. Daraus ergeben sich die Fälle $k \geq 1$ und $k < 1$ nach denen wir eine Fallunterscheidung durchführen.

- Für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \geq 1$ gilt $2k \geq 2 > 1$ und somit $2k \neq 1$.
- Für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \leq 0$ gilt $2k \leq 0 < 1$ und damit $2k \neq 1$.

Insgesamt gilt also: $\forall k \in \mathbb{Z} : 2k \neq 1$, d.h. $2 \nmid 1$. ■

Aufgabe 1.31. Negieren Sie

$$\forall x \in X : \exists y \in Y : f(x) = y.$$

Aufgabe 1.32. Es stehe $\ell(x, y)$ für die Aussage „x ist in y verliebt.“ Ferner bezeichne M die Menge der Männer und F die Menge der Frauen. Übersetzen Sie die folgenden Aussagen in Textform

(i) $\forall m \in M : \exists f \in F : \ell(m, f)$

(ii) $\exists f \in F : \forall m \in M : \ell(m, f)$

(iii) $\exists m \in M : \forall f \in F : \neg(\ell(m, f))$

(iv) $\forall f \in M : \exists m \in F : \ell(f, m)$

(v) $\forall f \in F : \exists m \in M : \neg(\ell(m, f))$

(vi) $\exists m \in F : \forall f \in M : \ell(f, m)$

Aufgabe 1.33. Zeigen Sie

(i) $\forall n \in \mathbb{N} : n \neq 0$

(ii) $7 \nmid 46$

(iii) $\forall a \in \mathbb{Z} : \forall b \in \mathbb{Z} : (a < 0) \wedge (b > 0) \Rightarrow (a \cdot b < 0)$

(iv) $\forall m \in \mathbb{Z} : (m > 1) \Rightarrow m \nmid 1.$

Aufgabe 1.34. Formulieren Sie die folgende Aussage als für-alle-Aussage und beweisen Sie sie indirekt: Es gibt keine von Null verschiedene ganze Zahlen a und b

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

gilt.