Tensoren und Relativität

Johannes Fahrner

Proseminar Lineare Algebra WS2016/2017
Universität Konstanz

Zusammenfassung

In dieser Ausarbeitung wollen wir uns mit Tensoren beschäftigen und uns ansehen, inwiefern sie in der Physik, hier besonders in der Relativitätstheorie, Anwendung finden. So wie wir die Tensoren einführen, können sie als Verallgemeinerung von Matrizen angesehen werden. Wir werden die für Anwendungen wichtigsten Notationen und formalen Eigenschaften von Tensoren besprechen und dann überlegen, inwiefern solche Objekte gut dafür geeignet sind, um die Relativitätstheorie darzustellen.

Inhalt

1 Einführung

Bei der Beschreibung von physikalischen Phänomenen spielen **Koordinatensysteme** immer eine wichtige Rolle: Wir sprechen dauernd vom Ort und von der Zeit. Für viele physikalische Vorgänge gibt es Koordinatensysteme, in denen die Beschreibung des Vorgangs besonders einfach ist, gegenüber solchen, in denen die Beschreibung eine sehr komplizierte Form annimmt. Um darauf flexibel reagieren zu können, ist es gut, sich mit dem Wechsel von Koordinatensystemen (mathematisch) auszukennen. Benutzen wir Koordinatensysteme, welche durch Vektorräume dargestellt werden können, kommt hier das Stichwort "**Basiswechsel**" aus der linearen Algebra ins Spiel. Basiswechseln kommt in diesem Vortrag eine zentrale Bedeutung zu.
Andererseits ist es uns aber in der Physik wichtig, dass die Naturgesetze nicht von den verwendeten Koordinaten abhängen. Besonders schön und nützlich ist also ein Kalkül, der sowohl Koordinatenwechsel möglich und einfach macht, als auch gleichzeitig eine einheitliche (d.h. für alle Koordinatensysteme gültige) Formulierung physikalischer Gesetze zulässt. Genauer werden wir uns mit diesem Punkt (und der Motivation dafür) später in Abschnitt 4 beschäftigen, wofür wir die einführenden Abschnitte aus [1] verwenden werden. Auf der mathematischen Seite sind es – wie der Titel bereits sagt – die **Tensoren**, die das Gewünschte leisten sollen.

In Abschnitt 2 werden wir nun zunächst die aus der linearen Algebra bereits bekannten Themen kurz wiederholen, die für unsere weitere Arbeit besonders wichtig sind. Dabei werden wir die Einsteinsche Summenkonvention verwenden, welche sich als hilfreich in Bezug auf die Übersichtlichkeit und Einfachheit der Rechenausdrücke erweisen wird. In Abschnitt 3 kümmern wir uns um die Einführung von Tensoren und die mathematischen Grundlagen dazu. In Abschnitt 4 können wir uns physikalische Anwendungen ansehen, auch wenn wir zwischendurch schon immer wieder auf mögliche Anwendungen hindeuten, um uns ein bisschen zu motivieren.

2 Die Einsteinsche Summenkonvention

Im folgenden seien immer K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, V in n-dimensionaler K-Vektorraum, V^* der Dualraum von V, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ und $B' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ Basen von V und $B^* = (\omega^1, \ldots, \omega^n)$ und $B'^* = (\omega'^1, \ldots, \omega'^n)$ jeweils die zu B bzw. B' dualen Basen von V^*. Die Stellung der Indizes (unten oder oben) wird unten erläutert. Zu einem Vektor $v \in V$ bezeichnen wir mit v^i seine Koordinaten bzgl. B und mit v'^i seine Koordinaten bzgl. B'.
Wir verwenden in dieser Arbeit die **Einsteinsche Summenkonvention**: Tritt in ei-

nem Rechenausdruck derselbe Index einmal unten und einmal oben auf, so wird über ihn **summiert** (auch **ohne Summenzeichen**). Die Summationsgrenzen werden immer aus dem Kontext klar (bei uns geht es immer von 1 bis n).
Die Darstellung von $v \in V$ durch seine Koordinaten, die wir üblicherweise als $v = \sum_{i=1}^{n} v_i b^i$ schreiben, kann also mit Hilfe der Einsteinschen Summenkonvention geschrieben werden als $v = v^i b_i = v'^i b'_i$. Für $\alpha \in V^*$ machen wir es ganz ähnlich und schreiben $\alpha = \alpha_i \omega^i = \alpha'_i \omega'^i$.
Wie gewohnt können wir den Basiswechsel von B nach B' durch Koeffizienten einer Basiswechselmatrix $D = (d^i_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ darstellen als $b_j = d^i_j b'_i$. D sei ab jetzt also die Basiswechselmatrix von B nach B'. Für die Koordinaten eines Vektors $v \in V$ ergibt sich damit $v'^i = d^i_j v^j$ bzw. $v^i = \tilde{d}^i_j v'^j$, wobei die $\tilde{d}^i_j$ die Koeffizienten der Inversen von D bezeichnen, also $D^{-1} = (\tilde{d}^i_j)_{1 \leq i,j \leq n}$. Für die dualen Basen erhalten wir als Transformationsregel $\omega'^i = d^i_j \omega^j$ bzw. $\omega^i = \tilde{d}^i_j \omega'^j$. Für die Koordinaten eines Vektors $\alpha \in V^*$ ergibt sich damit $\alpha_j = d^i_j \alpha'_i$ bzw. $\alpha'_j = \tilde{d}^i_j \alpha_i$.
Wir sehen hier, dass die Transformation der v^i in dem Sinn "gegenläufig" zur Basistransformation in V ist, dass wir sie durch die v'^j mit Hilfe der $\tilde{d}^i_j$ darstellen, obwohl wir für die Darstellung der b_j durch b'_i die d^i_j benutzten. Während wir also für die Basistransformation D verwenden, verwenden wir für die Koordinatentransformation D^{-1}. Wir nennen dieses Transformationsverhalten der Koordinaten in V **kontravariant**. Dagegen transformieren sich die Koordinaten in V^* **kovariant**: Dort haben wir nämlich $\alpha'_j = \tilde{d}^i_j \alpha_i$ (der Wechsel von "alten" zu "neuen" Koordinaten funktioniert also so wie in V von der "alten" zur "neuen" Basis). Die Basis in V^* transformiert sich dagegen kontravariant, so wie die Koordinaten in V. Damit können wir die **Stellung der Indizes** rechtfertigen: Wir verwenden Indizes **unten für kovariantes** Transformationsverhalten und **oben für kontravariantes** Transformationsverhalten. Die Elemente $\alpha \in V^*$ nennen wir auch **Kovektoren** aufgrund ihres Transformationsverhaltens. Wir sollten hier bereits bemerken (und im Hinterkopf behalten!), dass die Redeweise von kovariantem und kontravariantem Transformationsverhalten relativ zu einem Basiswechsel eingeführt wurde. Dieser Bezug ist wichtig! Das wird später noch deutlich.

Bei indizierten Größen mit zwei Indizes sprechen wir auch von Matrizen und verwenden dann häufig einen Großbuchstaben für die Matrix und den zugehörigen Kleinbuchstaben für die Koeffizienten. Im Fall eines oberen und eines unteren Index steht dann der obere für die Zeilen und der untere für Spalten der Matrixdarstellung. Bei zwei unteren oder zwei oberen Indizes steht der erste für die Zeilen und der zweite für die Spalten. Bei einer Matrixmultiplikation $A \cdot B$ kann also das, was auf Koordinatenebene passiert, zum Beispiel durch Gleichungen wie $(AB)_{ik} = a_{ij} b^j_k$ oder $(AB)^{ik} = a^i_j b^{jk}$ beschrieben werden (die Stellung der Indizes hängt vom Transformationsverhalten ab). Dagegen würde ein Ausdruck wie $a^{ij}b^k_j$ dem (k,i)-ten Koeffizienten von $B \cdot A^t$ entsprechen.

Damit sind wir gewappnet für die Einführung von Tensoren. Denn diese werden wir letztendlich über ihr Transformationsverhalten definieren.

3 Mathematische Grundlagen über Tensoren

3.1 Definition und Notation von Tensoren

Wir werden Tensoren hier nicht wie in der linearen Algebra üblich über das Tensorprodukt von Vektorräumen einführen, sondern eine näher an den angestrebten Anwendungen orientierte Vorgehensweise wählen. Bei Interesse kann es sich aber trotzdem lohnen, sich zu überlegen, wie die beiden formalen Darstellungen miteinander in Verbindung gebracht werden können (betrachte dazu das Tensorprodukt ausschließlich von V und V^* und Kopien davon). Wir werden eher konstruktiv vorgehen: Wir überlegen uns immer, was wir haben wollen, und konstruieren die mathematischen Objekte dann so, dass sie das leisten. An manchen Stellen machen wir uns aber auch klar, wie die Ergebnisse in ein systematischeres mathematisches Gerüst eingebaut werden können.

Tensoren sollen Größen mit Indizes sein, die sich wie oben kontravariant (für obere Indizes) und kovariant (für untere Indizes) transformieren. Damit eigenen sie sich dann nämlich gut für physikalische Anwendungen, da Darstellungen mit Tensoren leicht an verschiedene Koordinatensysteme angepasst werden können. Die Tensoren, die wir bisher kennengelernt haben, waren die Vektoren $v \in V$ und Kovektoren $\alpha \in V^*$. Wir verallgemeinern das nun auf Tensoren mit beliebiger Anzahl an Indizes, deren Transformationsverhalten mit dem in V zusammenhängt. Die Indizes teilen sich auf in obere und untere Indizes. Tensoren mit derselben Anzahl an unteren und oberen Indizes werden wir zusammengefasst als einen Vektorraum betrachten, den **Tensorraum**. Bei einem Tensor mit r oberen und s unteren Indizes sprechen wir von einem Tensor der **Stufe** (r,s). Er ist r-fach kontravariant und s-fach kovariant. Entsprechend sagen wir auch, dass der zugehörige Tensorraum die Stufe (r,s) hat und schreiben T^r_s dafür. Die Dimension eines solchen Vektorraums ergibt sich aus der Anzahl der Indizes: Jeder Index kann n verschiedene Werte annehmen, da V und somit V^* n-dimensionale Vektorräume sind. Der Tensorraum soll somit Dimension n^{r+s} haben. Für ein Element $t \in T^r_s$ werden wir dann Koordinaten der Form $t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}$ haben. Wir können dann $t = t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} e^{j_1,\dots,j_s}_{i_1,\dots,i_r}$ schreiben, wobei die $e^{j_1,\dots,j_s}_{i_1,\dots,i_r}$ Basisvektoren für T^r_s sein sollen. Damit kommen wir zu einer wichtigen Fragen: Was nehmen wir als Basisvektoren für T^r_s? Diese Frage ist grundlegend, da wir noch gar nicht genau gesagt haben, was für Objekte T^r_s eigentlich enthält. Da wir hier sehr konstruktiv vorgehen können wir es uns leicht machen: Wir sagen einfach, die $e^{j_1,\dots,j_s}_{i_1,\dots,i_r}$ seien paarweise verschiedene Objekte für $1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq n$. Und T^r_s sei der eindeutige K-Vektorraum, der die Menge der $e^{j_1,\dots,j_s}_{i_1,\dots,i_r}$ als Basis hat, also die Menge aller Linearkombinationen davon. Das halten wir fest in der folgenden

Definition 3.1.(Tensorraum) *Seien $r, s \in \mathbb{N}$ und die $e^{j_1,\dots,j_s}_{i_1,\dots,i_r}$ wie oben. Wir nennen*

$$T^r_s := \left\{ t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} e^{j_1,\dots,j_s}_{i_1,\dots,i_r} \mid t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} \in K \text{ für } 1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq n \right\}$$

den Tensorraum der Stufe (r, s) über K.

Damit haben wir den ersten wichtigen Schritt gemacht, nämlich zu sagen, was T^r_s überhaupt ist. Nun wollten wir für die Tensoren ein bestimmtes Transformationsverhalten. Der Bezug zu einem Basiswechsel in V fehlt aber bisher noch. Um uns an einen solchen Bezug heranzuarbeiten, schreiben wir $e^{j_1,\dots,j_s}_{i_1,\dots,i_r} = b_{i_1} \otimes \cdots \otimes b_{i_r} \otimes \omega^{j_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{j_s}$. Wir behandeln das hier bloß als eine Schreibweise, um einen Bezug zur Basis B von V und B^* von V^* herzustellen (zur Erinnerung: Wir benutzen die Definitionen von B, B^*, B' und B'^* aus Abschnitt 2). Das Zeichen "$\otimes$" hat für uns hier also keine besondere Bedeutung (aber denen, die sich das Tensorprodukt anschauen, hilft es vielleicht, "unsere" Tensoren mit den Elementen eines Tensorprodukts in Verbindung zu bringen). Den gewünschten Bezug stellen wir nun durch eine Definition her:

Definition 3.2.(Basistransformation im Tensorraum) *Zu dem Basiswechsel von B nach B' in V definieren wir den Basiswechsel in T^r_s durch*

$$e'^{j_1,\dots,j_s}_{i_1,\dots,i_r} := b'_{i_1} \otimes \cdots \otimes b'_{i_r} \otimes \omega'^{j_1} \otimes \cdots \otimes \omega'^{j_s} := \tilde{d}^{k_1}_{i_1} \cdots \tilde{d}^{k_r}_{i_r} d^{j_1}_{l_1} \cdots d^{j_s}_{l_s} e^{l_1,\dots,l_s}_{k_1,\dots,k_r}.$$

Wir müssen jetzt kurz prüfen, dass die neu definierten Vektoren ebenfalls wieder eine Basis von T^r_s bilden.

Satz 3.3. *Die Menge $\left\{ e'^{j_1,\dots,j_s}_{i_1,\dots,i_r} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq n \right\}$ ist eine Basis von T^r_s.*

Beweis. Da die $e^{j_1,\dots,j_s}_{i_1,\dots,i_r}$ eine Basis von T^r_s bilden, genügt es zu zeigen, dass sich die $e^{j_1,\dots,j_s}_{i_1,\dots,i_r}$ durch die $e'^{j_1,\dots,j_s}_{i_1,\dots,i_r}$ darstellen lassen. Es gilt

$$\begin{aligned} e_{i_1,\dots,i_r}^{j_1,\dots,j_s} &= \delta_{i_1}^{k_1}\cdots\delta_{i_r}^{k_r}\delta_{l_1}^{j_1}\cdots\delta_{l_s}^{j_s}e_{k_1,\dots,k_r}^{l_1,\dots,l_s} \\ &= d_{i_1}^{m_1}\cdots d_{i_r}^{m_r}\tilde{d}_{o_1}^{j_1}\cdots\tilde{d}_{o_s}^{j_s}\tilde{d}_{m_1}^{k_1}\cdots\tilde{d}_{m_r}^{k_r}d_{l_1}^{o_1}\cdots d_{l_s}^{o_s}e_{k_1,\dots,k_r}^{l_1,\dots,l_s} \\ &= d_{i_1}^{m_1}\cdots d_{i_r}^{m_r}\tilde{d}_{o_1}^{j_1}\cdots\tilde{d}_{o_s}^{j_s}e_{m_1,\dots,m_r}^{\prime o_1,\dots,o_s}, \end{aligned}$$

wobei δ_j^i das Kroneckerdelta bezeichnet. Also sind die $e_{i_1,\dots,i_r}^{j_1,\dots,j_s}$ Linearkombinationen der $e_{i_1,\dots,i_r}^{\prime j_1,\dots,j_s}$. □

Wenn wir nun schon am Rechnen damit sind, können wir auch gleich nachprüfen, ob sich die Koordinaten der $t \in T_s^r$ auch wirklich so transformieren wie gewünscht.

Satz 3.4.(Transformationsverhalten der Tensoren) *Sei* $t = t_{j_1,\dots,j_s}^{i_1,\dots,i_r}e_{i_1,\dots,i_r}^{j_1,\dots,j_s} \in T_s^r$ *beliebig. Dann werden die Koordinaten* $t_{j_1,\dots,j_s}^{i_1,\dots,i_r}$ *beim Basiswechsel von den* $e_{i_1,\dots,i_r}^{j_1,\dots,j_s}$ *zu den* $e_{i_1,\dots,i_r}^{\prime j_1,\dots,j_s}$ *r-fach kontravariant und s-fach kovariant in Bezug auf den Basiswechsel von B nach B' in V transformiert.*

Beweis. Wir suchen $t_{j_1,\dots,j_s}^{\prime i_1,\dots,i_r} \in K$ mit $t = t_{j_1,\dots,j_s}^{\prime i_1,\dots,i_r}e_{i_1,\dots,i_r}^{\prime j_1,\dots,j_s}$. Setzen wir die Darstellung von t durch die $e_{i_1,\dots,i_r}^{j_1,\dots,j_s}$ ein und stellen diese wiederum durch die $e_{i_1,\dots,i_r}^{\prime j_1,\dots,j_s}$ wie im letzten Satz dar, so erhalten wir die Gleichung $t_{j_1,\dots,j_s}^{\prime i_1,\dots,i_r}e_{i_1,\dots,i_r}^{\prime j_1,\dots,j_s} = t_{j_1,\dots,j_s}^{i_1,\dots,i_r}d_{i_1}^{m_1}\cdots d_{i_r}^{m_r}\tilde{d}_{o_1}^{j_1}\cdots\tilde{d}_{o_s}^{j_s}e_{m_1,\dots,m_r}^{\prime o_1,\dots,o_s}$. Ein Koeffizientenvergleich ergibt dann

$$t_{o_1,\dots,o_s}^{\prime m_1,\dots,m_r} = d_{i_1}^{m_1}\cdots d_{i_r}^{m_r}\tilde{d}_{o_1}^{j_1}\cdots\tilde{d}_{o_s}^{j_s}t_{j_1,\dots,j_s}^{i_1,\dots,i_r}.$$

Also werden die r oberen Indizes kontravariant und die s unteren Indizes kovariant transformiert. □

3.2 Tensoren und multilineare Abbilungen

Wir haben bisher das Transformationsverhalten von Tensoren kennengelernt. Einige Aspekte dabei könnten uns schon bekannt vorkommen, da wir sie im Fall von Darstellungsmatrizen linearer Abbildungen schon so ähnlich kennengelernt haben. Um das Verständnis von Tensoren zu vertiefen, wollen wir uns in diesem Abschnitt ansehen, wie das Konzept der Darstellungsmatrizen verallgemeinert werden kann und wie Tensoren dann diese verallgemeinerte Rolle übernehmen können, also letztlich mit gewissen Abbildungen identifiziert werden können.

Erinnern wir uns zunächst nochmal an das Transformationsverhalten von Darstellungsmatrizen. Ist $f : V \to V$ eine lineare Abbildung und A die Darstellungsmatrix von f bzgl. B, so ist $A' = DAD^{-1}$ die Darstellungsmatrix von f bzgl. B'. In Koordinatenform schreiben wir dafür $a'^k_l = d^k_i a^i_j \tilde{d}^j_l = d^k_i \tilde{d}^j_l a^i_j$. Es ist also naheliegend, Darstellungsmatrizen als $(1,1)$-Tensoren aufzufassen. Auch Kovektoren sind lineare Abbildungen, nämlich von V nach K. Sie können also als $(0,1)$-Tensoren aufgefasst werden. Um auch Vektoren $v \in V$ nach demselben Muster als Tensoren auffassen zu können, nämlich $(1,0)$-Tensoren, können wir die natürlich durch sie gegebenen linearen Abbildungen von V^* nach K betrachten: $f_v : V^* \to K, \alpha \mapsto \alpha(v)$. Um etwas systematischer bei der Verallgemeinerung vorzugehen, können wir auch die Abbildung $f : V \to V$ in eine Abbildung nach K umschreiben, etwa zu $g : V^* \times V \to K, (\alpha, v) \mapsto \alpha(f(v))$. Diese Abbildung ist nun in beiden Argumenten linear (für das erste Argument folgt das sofort aus der punktweisen Definition von Addition und skalarer Multiplikation von linearen Abbildungen und für das zweite Argument folgt es aus der Linearität von f und dem ersten Argument). Als weiteres, bekanntes Beispiel können Bilinearformen $f : V \times V \to K$ dienen. Ist hier A die Darstellungsmatrix von f bzgl. B, so ist $A' = \left(D^{-1}\right)^t AD^{-1}$ die Darstellungsmatrix bzgl. B'. In Koordinaten haben wir dafür $a'_{ij} = \tilde{d}^k_i \tilde{d}^l_j a_{kl}$. Durch das zweifach kovariante Transformationsverhalten denken wir hierbei also an einen $(0,2)$-Tensor. Vergleichen wir die Beispiele, so sehen wir, dass sich nur die Definitionsbereiche ändern und die Stufe des identifizierten Tensors scheint genau mit den Definitionsbereichen zusammenzuhängen. Somit werden wir fast schon gedrängt zu folgender

Proposition 3.5.(Identifikation von Tensoren mit multilinearen Abbildungen) *Seien* $r, s \in \mathbb{N}$ *und sei* $L^r_s(V,K) := \{f : V^{*r} \times V^s \to K \mid f$ *linear in jedem Argument*$\}$. *Dann sind* T^r_s *und* L^r_s *isomorph.*

Beweisskizze. Die wohl naheliegendste Identifikation von T^r_s mit dem Raum der multilinearen Abbildungen von $V^{*r} \times V^s$ nach K, $L^r_s(V,K)$, ist wohl die folgende. Beachte dabei, dass eine multilineare Abbildung wie schon bei linearen Abbildungen mit einem Argument oder auch Bilinearformen dadurch eindeutig festgelegt ist, was sie liefert, wenn man Basisvektoren einsetzt. Wir identifizieren nun $e^{j_1,\dots,j_s}_{i_1,\dots,i_r} = b_{i_1} \otimes \cdots \otimes b_{i_r} \otimes \omega^{j_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{j_s}$ mit derjenigen multilinearen Abbildung, welche das Tupel $(\omega^{i_1}, \dots, \omega^{i_r}, b_{j_1}, \dots, b_{j_s})$ auf 1 abbildet und alle anderen Kombinationen von Basisvektoren aus B^* bzw. B auf 0. Wir bezeichnen diese Abbildung mit $f^{j_1,\dots,j_s}_{i_1,\dots,i_r}$, also $f^{j_1,\dots,j_s}_{i_1,\dots,i_r}\left(\omega^{k_1}, \dots, \omega^{k_r}, b_{l_1}, \dots, b_{l_s}\right) := \delta^{k_1}_{i_1} \cdots \delta^{k_r}_{i_r} \delta^{j_1}_{l_1} \cdots \delta^{j_s}_{l_s}$. Fassen wir die Menge aller solcher Abbildungen zusammen, so erhalten wir eine Basis des Vektorraums $L^r_s(V,K)$ aller multilinearer Abbildungen von $V^{*r} \times V^s$ nach K. Die Aussagen dieses Absatzes bis hier her beweisen wir nicht, weil die Beweise ganz ähnlich funktionieren wie die für ähnliche Aussagen aus der Lineare-Algebra-Vorlesung.

Was wir uns aber genauer anschauen wollen, ist das Transformationsverhalten, wenn wir bei dem Basiswechsel in V von B nach B' auf natürliche Weise die Basis in $L^r_s(V,K)$ transformieren, nämlich von $f^{j_1,\ldots,j_s}_{i_1,\ldots,i_r}$ zu $f'^{j_1,\ldots,j_s}_{i_1,\ldots,i_r}$, welche von den neuen Basisvektortupeln nur $(\omega'^{i_1},\ldots,\omega'^{i_r},b'_{j_1},\ldots,b'_{j_s})$ auf 1 abbildet und alle anderen auf 0. Wir müssen nur zeigen, dass sich die $f'^{j_1,\ldots,j_s}_{i_1,\ldots,i_r}$ zu den $f^{j_1,\ldots,j_s}_{i_1,\ldots,i_r}$ genau so verhalten, wie die $e'^{j_1,\ldots,j_s}_{i_1,\ldots,i_r}$ zu den $e^{j_1,\ldots,j_s}_{i_1,\ldots,i_r}$, denn dann folgt das tensorielle Transformationsverhalten multilinearer Abbildungen genau wie im letzten Abschnitt.

Satz 3.6.(Koordinatentransformation multilinearer Abbildungen) *Seien $f^{j_1,\ldots,j_s}_{i_1,\ldots,i_r}$ und $f'^{j_1,\ldots,j_s}_{i_1,\ldots,i_r}$ definiert wie oben. Dann gilt*

$$f'^{j_1,\ldots,j_s}_{i_1,\ldots,i_r} = \tilde{d}^{k_1}_{i_1}\cdots\tilde{d}^{k_r}_{i_r} d^{j_1}_{l_1}\cdots d^{j_s}_{l_s} f^{l_1,\ldots,l_s}_{k_1,\ldots,k_r}.$$

Beweis. Wir wollen die Gleichheit von zwei Abbildungen zeigen. Dafür reicht es zu zeigen, dass sie auf den Tupeln aus Basisvektoren übereinstimmen. Sei also $(\omega'^{m_1},\ldots,\omega'^{m_r},b'_{o_1},\ldots,b'_{o_s}) \in B'^{*r}\times B'^s$ beliebig. Wir haben zu zeigen, dass dieses Tupel in die rechte Seite eingesetzt nur 1 ergibt für $(m_1,\ldots,m_r,o_1,\ldots,o_s) = (i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s)$ und sonst 0. Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
& \tilde{d}^{k_1}_{i_1}\cdots\tilde{d}^{k_r}_{i_r} d^{j_1}_{l_1}\cdots d^{j_s}_{l_s} f^{l_1,\ldots,l_s}_{k_1,\ldots,k_r}(\omega'^{m_1},\ldots,\omega'^{m_r},b'_{o_1},\ldots,b'_{o_s})\\
= \; & \tilde{d}^{k_1}_{i_1}\cdots\tilde{d}^{k_r}_{i_r} d^{j_1}_{l_1}\cdots d^{j_s}_{l_s} f^{l_1,\ldots,l_s}_{k_1,\ldots,k_r}(d^{m_1}_{p_1}\omega^{p_1},\ldots,d^{m_r}_{p_r}\omega^{p_r},\tilde{d}^{q_1}_{o_1}b_{q_1},\ldots,\tilde{d}^{q_s}_{o_s}b_{q_s})\\
= \; & d^{k_1}_{i_1}\cdots d^{k_r}_{i_r}\tilde{d}^{j_1}_{l_1}\cdots\tilde{d}^{j_s}_{l_s}\tilde{d}^{m_1}_{p_1}\cdots d^{m_r}_{p_r}\tilde{d}^{q_1}_{o_1}\cdots\tilde{d}^{q_s}_{o_s} f^{l_1,\ldots,l_s}_{k_1,\ldots,k_r}(\omega^{p_1},\ldots,\omega^{p_r},b_{q_1},\ldots,b_{q_s})\\
= \; & d^{k_1}_{i_1}\cdots d^{k_r}_{i_r}\tilde{d}^{j_1}_{l_1}\cdots\tilde{d}^{j_s}_{l_s}\tilde{d}^{m_1}_{p_1}\cdots d^{m_r}_{p_r}\tilde{d}^{q_1}_{o_1}\cdots\tilde{d}^{q_s}_{o_s}\delta^{p_1}_{k_1}\cdots\delta^{p_r}_{k_r}\delta^{l_1}_{q_1}\cdots\delta^{l_s}_{q_s}\\
= \; & d^{k_1}_{i_1}\cdots d^{k_r}_{i_r}\tilde{d}^{j_1}_{l_1}\cdots\tilde{d}^{j_s}_{l_s}\tilde{d}^{m_1}_{k_1}\cdots d^{m_r}_{k_r}\tilde{d}^{l_1}_{o_1}\cdots\tilde{d}^{l_s}_{o_s}\\
= \; & \delta^{m_1}_{i_1}\cdots\delta^{m_r}_{i_r}\delta^{j_1}_{o_1}\cdots\delta^{j_s}_{o_s}.
\end{aligned}$$

□

Wir sehen jetzt also, dass wir von vornherein auch den Raum $L^r_s(V,K)$ hätten benutzen können, da er alle gewünschten Eigenschaften hat: nämlich das angestrebte Transformationsverhalten bei Basiswechsel in V (mehr haben wir ja überhaupt nicht gefordert).

3.3 Wichtige Tensoroperationen und -eigenschaften

Wir wollen in diesem Abschnitt die Tensoroperationen der Kontraktion, sowie des Hebens und Senkens von Indizes behandeln und über Symmetrieeigenschaften von Tensoren sprechen.

Die **Kontraktion** ist eine Verallgemeinerung der Spurbildung. Bei einer Matrix $A = (a^i_j)_{1\le i,j\le n}$ bilden wir die Spur, indem wir die Diagonaleinträge aufsummieren, also den

Ausdruck a_i^i berechnen. Haben wir einen Tensor $t = t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} e^{j_1,\dots,j_s}_{i_1,\dots,i_r} \in T^r_s$, so können wir auch hier in der Koordinatendarstellung an einer oberen und einer unteren Stelle denselben Index wählen, um darüber zu summieren, z.B. ist $t^{i_1,\dots,i_{k-1},m,i_{k+1},\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_{l-1},m,j_{l+1},\dots,j_s}$ eine Kontraktion von t. Das entstehende Objekt ist nun nur noch $(r-1)$-fach kontravariant und $(s-1)$-Fach kovariant.
Für das **Senken und Heben** von Indizes müssen wir zunächst einen dafür zu benutzenden Tensor mit zwei Indizes fixieren, dessen Matrixdarstellung invertierbar und symmetrisch ist. In der Physik wird dafür der sogenannte metrische Tensor verwendet. Sei g_{ij} so, dass die Matrix $(g_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ invertierbar und symmetrisch ist, und sei g^{jk} gewählt mit $g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$. Dann benutzen wir g_{ij} zum Senken und g^{jk} zum Heben von Indizes. Dabei ist allerdings die Reihenfolge der Indizes nicht zu vernachlässigen, da sonst Heben und Senken nicht wohldefiniert wären. Für einen Tensor mit Koordinaten ${t_i}^j{}_k$ definieren wir z.B. das Senken des zweiten Index durch $g_{jl}{t_i}^j{}_k = t_{ilk}$. Mit g^{lj} können wir das auch wieder rückgängig machen: $g^{jl}t_{ilk} = {t_i}^j{}_k$.

Wir haben gerade schon die Symmetrie einer Matrix benutzt. Auch diese Eigenschaft lässt sich auf Tensoren verallgemeinern:

Definition 3.7.(Symmetrie, Antisymmetrie) *Wir sagen,* $t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}$ *ist in den Indizes* i_k *und* i_l, $1 \leq k < l \leq r$, ***symmetrisch**, falls*

$$t^{i_1,\dots,i_{k-1},i_l,i_{k+1},\dots,i_{l-1},i_k,i_{l+1},\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} = t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}$$

gilt. Analog wird die Symmetrie auch in unteren Indizes definiert. Bei der Antisymmetrie dreht sich beim Vertauschen der Indizes das Vorzeichen um. Also ist $t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}$ *in den Indizes* i_k *und* i_l, $1 \leq k < l \leq r$, ***antisymmetrisch**, falls*

$$t^{i_1,\dots,i_{k-1},i_l,i_{k+1},\dots,i_{l-1},i_k,i_{l+1},\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} = -t^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}$$

gilt.

In der Definition wird für die Symmetrie Bezug auf eine bestimmte Koordinatendarstellung des Tensors genommen. Es ist aber leicht nachzurechnen, dass auch bei einer Koordinatentransformation die Symmetrie erhalten bleibt (und entsprechend auch die Antisymmetrie). Man kann also wirklich von der Symmetrie (bzw. Antisymmetrie) des Tensors sprechen und nicht bloß einer seiner Koordinatendarstellungen.

4 Tensorgleichungen in der Relativitätstheorie

Wir wollen uns in diesem Abschnitt in Beispiele aus der speziellen Relativitätstheorie hinein denken. Wie wir ja oben immer wieder betonten, kommt es bei dem Transformationsverhalten von Tensoren auf den Bezug zu einem bestimmten Basiswechsel an. Die Wahl möglicher Basiswechsel kann zusätzlich eingeschränkt werden. Im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie betrachtet man Transformationen zwischen Koordinatensystemen, die relativ zueinander verschoben, gedreht und mit konstanter Geschwindigkeit bewegt sein können. Einsteins Relativitätsprinzip besagt nun, dass die physikalischen Gesetze in solchen Systemen dieselbe Form haben müssen, d.h. keines solcher Systeme ist anderen übergeordnet oder sonst irgendwie prinzipiell von ihnen unterscheidbar. Dazu können wir uns z.B. überlegen, wie zwei Beobachter im sonst komplett leeren Raum sich aufeinander zu bewegen (mit konstanter Geschwindigkeit!). Jedem der Beobachter könnte es so vorkommen, dass er selbst ruht und sich nur der andere ihm nähert. Es gibt keine Möglichkeit für sie zu entscheiden, wer sich bewegt und wer nicht. Eine Beschreibung auftretender Phänomene sollte also nicht davon abhängen, dass sich einer der beiden bewegt und der andere ruht. Vielmehr sollten die Phänomene so beschrieben werden, dass sie den unterschiedlichen Perspektiven gerecht werden. Neben diesem Relativitätsprinzip (welches der Relativitätstheorie auch den Namen gibt), macht Einstein noch eine weitere wichtige Annahme: nämlich dass die Lichtgeschwindigkeit konstant ist (und sich nicht für relativ zueinander bewegte Beobachter ändert).

Schauen wir uns nun folgendes Beispiel an. Horst steht neben einem Bahngleis, während gerade ein Zug mit konstanter Geschwindigkteit v_1 vorbei fährt. Manfred fährt in dem Zug mit und wirft einen Ball im Zug in Fahrtrichtung mit der Geschwindigkteit v_2. Aus Manfreds Bezugssystem betrachtet bewegen er und der Zug sich überhaupt nicht und der Ball hat die Geschwindigkeit $v_2 = v_2 + 0 = v_{Ball,Manfred} + v_{Zug,Manfred}$. Horst misst in seinem Bezugssystem sehr präzise die Geschwindigkeit des Balls. Sie beträgt bei ihm nicht $v_{Ball,Horst} + v_{Zug,Horst} = v_2 + v_1$, sondern ist etwas geringer. Wenn wir das Relativitätsprinzip berücksichtigen, so müsste doch die Addition von Geschwindigkeiten, wenn sie in einem Bezugssystem funktioniert (z.B. bei Manfred), immer funktionieren (also auch bei Horst). Wo muss hier dann das Problem liegen?

In der Relativitätstheorie werden Raum- und Zeitkoordinaten zu einem Koordinatenvektor zusammengefasst. D.h. wir befinden uns in einem vierdimensionalen Vektorraum. Die Basistransformationen, welche den beiden oben erwähnten Annahmen genügen, sind die sogenannten Lorentz-Transformationen. Bzgl. diesen ist die klassische

Geschwindigkeit kein Tensor. Deshalb kann im oberen Beispiel die Gleichung nicht so einfach transformiert werden. Ist w die klassische Geschwindigkeit eines Objekts, so lässt sich zeigen, dass sich die Größe $(u^\mu)_{1\leq\mu\leq 4} = \gamma \cdot (c, w_x, w_y, w_z)$ mit $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ tensoriell transformiert. Dabei ist v die Relativgeschwindigkeit der Bezugssysteme zwischen denen transformiert werden soll. Aus der transformierten Größe lässt sich dann wieder die eigentliche Geschwindigkeit des Objekts in dem anderen Bezugssystem berechnen.

Eine andere Anwendung finden wir, wenn wir uns fragen, wie sich elektrische und magnetische Felder im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie (d.h. bei Bezugssystemwechseln mit konstanter Relativgeschwindigkeit) transformieren. Dafür wird die Größe

$$\left(F^{ab}\right) := \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

betrachtet, wobei $\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$ das elektrische bzw. das magnetische Feld beschreiben. Weiter sei $(j^a) := \begin{pmatrix} c\rho_e \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$, wobei $\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$ die Stromdichte und ρ_e die elektrische Ladungsdichte bezeichnen. Mit diesen Bezeichnungen drückt

$$\partial_a F^{ab} = \frac{4\pi}{c} j^b$$

die sogenannten inhomogenen Maxwellgleichungen aus. Experimente legen die These nahe, dass diese in allen mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Bezugssystemen gelten. In einem solchen Bezugssystem gilt also eine entsprechende Gleichung $\partial'_a F'^{ab} = \frac{4\pi}{c} j'^b$. Es lässt sich zeigen, dass (j^a) und der Vierervektor der partiellen Ableitungen $(\partial_a) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right)$ sich tensoriell transformieren. Zusammengenommen folgt dann, dass auch $\left(F^{ab}\right)$ sich tensoriell transformiert (da die Gleichung nach dem Relativitätsprinzip immer dieselbe Form haben muss). Bezeichnen wir die Lorentztransformation mit (Λ^a_b), so ergibt sich $F'^{ab} = \Lambda^a_c \Lambda^b_d F^{cd}$. Die Komponenten des transformierten elektrischen und magnetischen Feldes können dann anschließend einfach in der transformierten Matrix $\left(F'^{ab}\right)$ abgelesen werden.

5 Literatur

[1] Torsten Fließbach *Allgemeine Relativitätstheorie*. Kap. 5-6. Spektrum Akademischer Verlag, München, 2006.