POSITIV (SEMI-)DEFINITE SESQUILINEARE FORMEN

SARAH-TANJA HESS

PROSEMINAR LINEARE ALGEBRA WS2016/2017
UNIVERSITÄT KONSTANZ

Zusammenfassung. In diesem Skript werden grundlegende Eigenschaften positiv (semi-)definiter Formen behandelt. Hierfür werden zunächst die Begriffe *sesquilineare Form* und *hermitesche Form* wiederholt und dann der Begriff der *positiven (Semi-)Definitheit* über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ sowohl für sesquilineare Formen, als auch für Matrizen eingeführt. Schlussendlich werden einige Beziehung zwischen solchen Formen und deren Darstellungsmatrizen aufgezeigt, sowie deren elementare Eigenschaften.

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

Aufbauend auf den Kenntnissen aus der *Linearen Algebra I* und *II* [3] kann man eine interessante Sonderform einer sesquilinearen Form definieren – die sogenannten *positiv (semi-)definiten Formen* über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Diese sind in ihrer Art und Eigenschaften sehr interessant und spielen in der höheren Mathematik eine wichtige Rolle, so zum Beispiel bei der Extremwertberechnung einer Funktion über $\mathbb{R}^n$. Genau aus diesem Grund konzentriert sich dieses Skript auf jene Sonderformen.

Hierfür werden in dem Abschnitt 2 zunächst bekannte Definitionen, wie der Begriff der Sesquilinearität bzw. der hermiteschen Eigenschaft wiederholt. Im Anschluss wird dann die zentrale Definition der **positiven (Semi-)Definitheit** für zunächst sesquilineare Formen [1], aber dann auch für Matrizen [2] eingeführt. Einige Beispiele werden dabei das Verständnis und den ersten Kontakt mit diesen Sonderformen erleichtern. Auch einige Beobachtungen zu Zusammenhängen bzw. Unterschieden zwischen den Definitionen über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ werden aufgezeigt werden.

Im Abschnitt 3 werden dann verschiedene gleichwertige Aussagen zu positiven (semi-)definiten Formen aufgestellt und bewiesen, wie zum Beispiel das Prüfkriterium über die Hauptminoren. Es erweist sich jedoch häufig als schwierig das Erfüllen der Definition nachzurechnen, daher muss oft auf weitere äquivalente Aussagen ausgewichen werden, welche ausführlich in diesem Abschnitt behandelt werden.

Im Abschnitt 4 sind sämtliche Aussagen zusammengefasst und bilden so ein optimales *Rezept* zum Prüfen der positiven (Semi-) Definitheit einer sesquilinearen Form, welches auch im weiteren Studienverlauf von Nutzen sein wird.

2. Grundlagen

Starten wir nun also mit den Grundlagen, die für den weiteren Verlauf des Skriptes tragend sein werden.

Erinnerung 2.1. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ($\mathbb{K}$-VR), so heißt $f : V \times V \to \mathbb{K}$ eine **sesquilineare Form,** falls $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V,\ \forall c \in \mathbb{K}$ gilt

i. $f(c\alpha + \beta, \gamma) = cf(\alpha, \gamma) + f(\beta, \gamma)$,
ii. $f(\alpha, c\beta + \gamma) = \bar{c}f(\alpha, \beta) + f(\alpha, \gamma)$.

Erinnerung 2.2. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, V ein $\mathbb{K}$-VR und $f : V \times V \to \mathbb{K}$ eine sesquilineare Form, so heißt f **hermitesche Form**, falls

$$\forall \alpha, \beta \in V : f(\alpha, \beta) = \overline{f(\beta, \alpha)}.$$

Nun ist es uns möglich die zentrale Definition der *positiven (Semi-)Definitheit* einzuführen.

Definition 2.3. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, V ein $\mathbb{K}$-VR und $f : V \times V \to \mathbb{K}$ eine sesquilineare Form, so heißt diese **positiv semidefinit**, falls gilt

i. f ist eine hermitesche Form,
ii. $\forall \alpha \in V : f(\alpha, \alpha) \geq 0$.

Ferner heißt f **positiv definit**, falls gilt

i. f ist eine hermitesche Form,
ii. $\forall \alpha \in V, \alpha \neq 0 : f(\alpha, \alpha) > 0$.

Bemerkung 2.4. Leicht lässt sich überprüfen, dass jede *positiv definite sesquilineare Form* ein **inneres Produkt** auf V definiert [1, Abschnitt 8.1]. Beachte hierbei, dass eine *positiv semidefinite Form* im Allgemeinen **kein** inneres Produkt auf V definiert, da auch $f(\alpha, \alpha) = 0$ für $\alpha \neq 0$ möglich ist.

Beispiel 2.5. Über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ist das *Standardskalarprodukt* eine *positiv definite sesquilineare Form.*

Beispiel 2.6. Sei $L^2(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f^2 \text{ ist integrierbar}\}$. So definiert $\lambda : L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $\lambda(f, g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ eine *positiv semidefinite Form.* Möchte man diese Form λ in eine *positiv definite Form* bringen, so ist dies zum Beispiel möglich, indem man zusätzlich die *Stetigkeit* der Funktionen fordert.

Im Weiteren werden wir nun sehen, was positiv (semi-)definite Matrizen sind und wie diese mit den positiv (semi-)definiten Formen zusammenhängen.

Definition 2.7. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, so heißt A eine **positiv semidefinite Matrix** falls gilt

i. $A = A^*$,
ii. $\forall X \in \mathbb{K}^{n \times 1} : X^*AX \geq 0$.

Analog heißt A eine **positiv definite Matrix** falls gilt

i. $A = A^*$,
ii. $\forall X \in \mathbb{K}^{n \times 1}; X \neq 0 : X^*AX > 0$.

Proposition 2.8. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $(n \in \mathbb{N})$, so gilt für alle $X \in \mathbb{C}^{n \times 1}, X \neq 0 : X^*AX > 0$, genau dann, wenn für alle $X \in \mathbb{R}^{n \times 1}, X \neq 0 : X^TAX > 0$ und $A = A^T$.

Erinnerung 2.9. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und für alle $X \in \mathbb{C}^{n \times 1}, X \neq 0$ gelte $X^*AX > 0$. Dann folgt durch Einsetzen der Einheitsvektoren, dass alle Hauptdiagonaleinträge positiv sein müssen. Schlussendlich liefern ähnlich Überlegungen sodann die Beziehung $A = A^*$.

Beweis.
$\Rightarrow$
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $(n \in \mathbb{N})$ mit $\forall X \in \mathbb{C}^{n \times 1}, X \neq 0 : X^*AX > 0$.
Somit folgt mit der eben gemachten Erinnerung direkt für alle $X \in \mathbb{R}^{n \times 1}, X \neq 0 : X^TAX > 0$ und $A = A^T$, da im Reellen die Konjugation wegfällt.
$\Leftarrow$
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und für alle $X \in \mathbb{R}^{n \times 1}, X \neq 0 : X^TAX > 0$ und $A = A^T$.
Betrachte nun einen beliebigen Vektor $X \in \mathbb{C}^{n \times 1}, X \neq 0$. Schreibe diesen in der Form $X = S + Pi$ mit $S, P \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ mit S und P nicht gleichzeitig 0. Es gilt

$$X^*AX = (S - iP)^T A(S + iP) = S^TAS + P^TAP + i(S^TAP - P^TAS) > 0.$$

Dies folgt aus den Vorraussetzungen und $S^TAP = S^TA^TP = P^TAS$. ∎

Beispiel 2.10. Betrachte die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, diese erfüllt für alle $X \in \mathbb{R}^2, X \neq 0 : X^TAX > 0$ und ist offensichtlich *nicht* symmetrisch. Schnell bemerkt man durch z.B. Einsetzen des Vektors $X = (1, i)^T \in \mathbb{C}^2$, dass $X^*AX = 2 + 2i \notin \mathbb{R}$ und somit die Ungleichung $\forall X \in \mathbb{C}^{2 \times 1}, X \neq 0 : X^*AX > 0$ nicht erfüllt wird.

Bemerkung 2.11. Somit ist eine *reelle* Matrix A genau dann positiv definit im *Komplexen*, wenn sie auch im *Reellen* positiv definit ist.

3. Eigenschaften und Äquivalenzaussagen

Im Folgenden werden nun einige Prüfkriterien basierend auf [1, Abschnitt 9.3] hergeleitet, anhand welcher man auf positive (Semi-)Definitheit prüfen kann.

Satz 3.1. Sei f eine sesquilineare Form über einem endlich dimensionalen $\mathbb{K}$-VR V. Es gilt f ist genau dann eine *positiv semidefinite Form*, wenn für die Darstellungsmatrix $A = [f]_{\mathfrak{B}}$ ($\mathfrak{B}$ geord. Basis für V, $\dim V = n \in \mathbb{N}$) gilt $A = A^*$ und für alle Skalare $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$: $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{kj} x_j \bar{x}_k \geq 0$ (Analog für *'positiv definit'* mit 'echt größer').

Beweis. Sei $\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, somit kann man alle Vektoren aus V als Linearkombination aus Basisvektoren darstellen. Sei also $\alpha \in V$ von der Form $\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$ mit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. Für die sesquilineare Form gilt somit $f(\alpha, \alpha) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_j, \sum_{k=1}^{n} x_k a_k\right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k x_j f(a_j, a_k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{kj} x_j \bar{x}_k$. Die Ungleichheit und die Selbstadjungiertheit ergibt sich aus der Definition 2.3. ∎

Es ist nun ersichtlich, dass falls man eine sesquilineare Form f über einem endlich dimensionalen $\mathbb{K}$-VR V hat, man auch die Funktion $g : \mathbb{K}^{n\times 1} \times \mathbb{K}^{n\times 1} \to \mathbb{K}$ mit $g(X, Y) = Y^* AX$, wobei $A = [f]_{\mathfrak{B}}$, d.h. die Darstellungsmatrix von f in einer Basis $\mathfrak{B}$ von V, auf die entsprechende Eigenschaft prüfen kann, statt sich mit f zu befassen.

Satz 3.2. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion $g : \mathbb{K}^{n\times 1} \times \mathbb{K}^{n\times 1} \to \mathbb{K}$ mit $g(X, Y) = Y^* AX$ ist genau dann eine *positiv definite sesquilineare Form, wenn ein invertierbares $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $A = P^* P$ existiert.*

Beweis. Zunächst lässt sich einfach prüfen, dass g eine *sesquilineare hermitesche Form* über $\mathbb{K}^{n\times 1}$ ist. Konzentrieren wir uns also auf die positive Definitheit, unter der Bedingung $A = P^* P$.
$\Leftarrow$
Es existiere also ein invertierbares $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $A = P^* P$. Offensichtlich gilt $g(X, X) = X^* P^* PX = (PX)^* PX \geq 0$. Dies ist der Fall, da durch die Konjugation bei der Multiplikation $(PX)^*(PX)$ auch bei den imaginären Anteilen ein positiver Summand entsteht. Insbesondere also für $X \neq 0$ mit P ist invertierbar: $(PX)^*(PX) > 0$, da die Spalten von P wegen der linearen Unabhängigkeit durch keine Linearkombination mit X zu 0 werden kann. Somit folgt die *positive Definitheit.*
$\Rightarrow$
Sei g nun also bereits *positiv definit* und damit, wie bereits vermerkt, ein *inneres Produkt* auf $\mathbb{K}^{n\times 1}$. Da wir uns in einem n-dimensionalen $\mathbb{K}$-VR befinden, lässt sich Gram-Schmidt anwenden. Somit existiert eine *geord. orthonormale Basis* $\mathfrak{B} = \{B_1, \dots, B_n\}$ mit $\forall i \in \{1, \dots, n\} : B_i \in \mathbb{K}^{n\times 1}$. Weiter folgt aus der Orthonormalität der Basis $\mathfrak{B}$, dass $\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \delta_{ij} = g(B_i, B_j) = B_j^* AB_i$. Es gilt damit offensichtlich für B (Darstellungsmatrix der geord. Basis $\mathfrak{B}$) $B^* AB = I_n$,

wobei I_n die Einheitsmatrix bezeichnet. Setzt man nun noch $P := B^{-1}$ wurde ein P gefunden, so dass die zweite Richtung der Aussage ebenfalls gilt, da $A = B^{-1^*}B^{-1} = P^*P$. ■

Korollar 3.3. Für eine solche *positiv definiten sesquilineare Form g* gilt unweigerlich $\det A > 0$.

Beweis. $\det A = \det(P^*P) = \det(P^*)\det(P) = \det(\bar{P})\det(P) =\mid \det(P) \mid^2 > 0.$ ■

Oftmals kann man die Definitheit von Matrizen und sesquilineare Formen leicht über ein weiteres Kriterium prüfen. Hierfür ist es nötig den Begriff der *Hauptminoren* einzuführen.

Definition 3.4. Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Die **Hauptminoren** $\Delta_k(A)$ sind definiert durch

$$\forall k = 1, \ldots, n: \ \Delta_k(A) = \det \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix}.$$

Lemma 3.5. Sei K ein Körper, $A \in K^{n\times n}$ invertierbare Matrix mit $n \in \mathbb{N}$. So sind folgende Aussagen äquivalent:

i. Es existiert eine obere Dreiecksmatrix $P \in K^{n\times n}$ mit $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$: $P_{kk} = 1$, so dass $B = AP$ eine untere Dreiecksmatrix ist,
ii. $\forall k \in \{1, \ldots, n\} : \Delta_k(A) \neq 0$.

Beweis. Für $P \in K^{n\times n}$ obere Dreiecksmatrix mit nur Eins-Einträgen auf der Hauptdiagonalen gilt für $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq n$: $B_{jk} = \sum_{r=1}^{k} A_{jr}P_{rk}$.
Stellt man dies nun um, wird ersichtlich, dass gelten muss $\sum_{r=1}^{k-1} A_{jr}P_{rk} = B_{jk} - A_{jk}$.
Ferner ist die Matrix $B = AP$ genau dann in unterer Dreiecksmatrixform, wenn für $1 \leq j \leq k-1$, $2 \leq k \leq n$: $\sum_{r=1}^{k-1} A_{jr}P_{rk} = -A_{jk}$.
Somit können wir eine weitere Äquivalenz aufstellen:
Es existiert genau dann eine obere Dreiecksmatrix $P \in K^{n\times n}$ mit der Eigenschaft, dass für $1 \leq k \leq n$ gilt $P_{kk} = 1$ und $B = AP$ eine untere Dreiecksmatrix ist, wenn für $1 \leq r \leq k$, $1 \leq k \leq n$ die Skalare P_{rk} existieren mit

(3.1)

$$1 \leq k \leq n : P_{kk} = 1 \text{ und } \forall j \in \{1, \ldots, k-1\},\ \forall k \in \{2, \ldots, k\} : \sum_{r=1}^{k-1} A_{jr}P_{rk} = -A_{jk}.$$

ii ⇒ *i*
Sei nun also $\forall k = 1, \ldots, n : \Delta_k(A) \neq 0$. In (3.1) wurde bereits ersichtlich, dass man für alle $k > 1$ die Skalare $P_{1k}, \ldots, P_{k-1,k}$ durch Lösen eines Gleichungssystems mit $k-1$ linearen Gleichungen erhält, deren Koeffizientenmatrix gerade die Matrix

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k-1,1} & \cdots & A_{k-1,k-1} \end{pmatrix}$$

ist. Dieses Gleichungssystem ist nun genau dann eindeutig lösbar, wenn die Koeffizientenmatrix invertierbar ist, also wenn gilt

$$0 \neq \det \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,k-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k-1,1} & \cdots & A_{k-1,k-1} \end{pmatrix} = \Delta_{k-1}(A).$$

Dies ist aber nach Voraussetzung gerade für alle $k > 1$ der Fall. Es lässt sich damit folgern, dass die entsprechende Skalare $P_{1,k}, \ldots, P_{k-1,k}$ existieren und mit (3.1) gilt somit auch die Behauptung.

i $\Rightarrow$ *ii*
Existiere nun eine obere Dreiecksmatrix $P \in K^{n \times n}$ bei der für alle $k = 1, \ldots, n$: $P_{kk} = 1$ und $B = AP$ ist eine untere Dreiecksmatrix. Ferner seien nun für $n \in \mathbb{N}$: $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ die Spalten der Matrizen A, B. Somit folgt anhand der Matrizenmultiplikation, dass gelten muss

i. $B_1 = A_1$,
ii. $1 < r \leq n \ : \ B_r = \sum_{j=1}^{r-1} P_{jr} A_j + A_r$.

Betrachten wir nun also für $1 \leq k \leq n$ beliebig, aber fest, die Matrix

$$\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{k1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & \cdots & B_{kk} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Nun bemerkt man mit *i* und *ii* , dass für alle $1 \leq r \leq k$ gilt, dass die r^{te} Spalte der Matrix in (3.2) eine Linearkombination der Spalten der Matrix

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix}$$

ist. Diese haben auf die Determinante jedoch keinen Einfluss nach [3, Lemma 5], so dass sich folgern lässt

$$\begin{aligned} \Delta_k(A) &= \det \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{k1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k1} & \cdots & B_{kk} \end{pmatrix} \\ &= \Delta_k(B) = B_{11} \cdots B_{kk} \neq 0. \end{aligned}$$

Da sowohl A, als auch P invertierbar sind, ist auch deren Produkt $B = AP$ invertierbar, wobei B eine obere Dreiecksmatrix ist. Somit folgt bereits die Behauptung. ■

Satz 3.6. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und V ein $\mathbb{K}$-VR mit $\dim V = n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{B}$ eine geord. Basis von V, f eine sesquilineare Form, $A = [f]_{\mathfrak{B}}$. So ist f genau dann eine *positiv definite Form, wenn gilt*

i. $A = A^*$,
ii. $\forall k = 1, \ldots, n : \Delta_k(A) > 0$.

Beweis.
$\Leftarrow$
Zunächst sei nun also $A = A^*$ (d.h. selbstadjungiert) und für $1 \leq k \leq n$ gilt $\Delta_k(A) > 0$. Mit Hilfe des zuvor genannten Lemmas 3.5 lässt sich somit schlussfolgern, dass eine obere Dreiecksmatrix P existiert mit für $1 \leq k \leq n \; : \; P_{kk} = 1$ und $B := AP$ in unterer Dreiecksmatrixform ist. Somit gilt aber auch, dass P^* eine untere Dreiecksmatrix ist, somit also auch ferner $P^*AP = P^*B$. Dies ist als Produkt zweier unterer Dreiecksmatrizen eine untere Dreiecksmatrix. Weiter gilt auch, da A selbstadjungiert ist, dass P^*AP selbstadjungiert ist. Zusammenfassend ist die Matrix $D := P^*AP$ somit selbstadjungiert und in unterer Dreiecksmatrixform. Somit ist sowohl D als auch D^T in unterer Dreiecksmatrixform, es kann sich also bei D nur um eine Diagonalmatrix handeln. Analog zum bereits geführten letzten Beweisschritt des Hilfslemmas 3.5 folgt somit die Beziehung für $1 \leq k \leq n$

$$\begin{aligned} D_{11} \cdots D_{kk} &= \Delta_k(D) = \Delta_k(P^*AP) = \Delta_k(P^*B) = \Delta_k(B) \\ &= \Delta_k(A) > 0. \end{aligned}$$

Also muss gelten $D_{11}, \ldots, D_{nn} > 0$. Die Matrix D ist folglich eine Diagonalmatrix mit nur positiven Einträgen.

Weiter gilt $A = [f]_{\mathfrak{B}}$ ist die Matrixdarstellung der sesquilinearen Form f in der Basis $\mathfrak{B} := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ mit $\dim V = n \in \mathbb{N}$. Somit lässt sich folgern, dass auch $D = [f]_{\mathfrak{B}'}$ mit $\mathfrak{B}' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}$, wobei für $1 \leq j \leq n$ gilt $\alpha'_j = \sum\limits_{i=1}^{n} P_{ij}\alpha_i$. Prüft man nun das Produkt X^*DX für ein $X \in K^{n\times 1}, \; X \neq 0$ auf seine Wertigkeit, erhält man, da D eine Diagonalmatrix mit nur positiven Einträgen ist, den Zusammenhang $X^*DX > 0$. Ferner ist die Verknüpfung $g(X,X) := X^*DX$ offensichtlich sesquilinear und hermitesch. Somit ist diese Verknüpfung *positiv definit*, also folgt auch die *positive Definitheit* von f.
$\Rightarrow$
Sei nun also f eine positiv definite sesquilineare Form mit $A = [f]_{\mathfrak{B}}$ in einem endlich-dimensionalen Vektorraum V aufgespannt durch die geord. Basis $\mathfrak{B} := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, wobei $n := \dim V \in \mathbb{N}$. Damit gilt aber bereits $A = A^*$, da f hermitesch ist.

Betrachte nun also für $1 \leq k \leq n$ den Untervektorraum V_k, aufgespannt durch die geord. Basis $\mathfrak{B}_k := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ und die darauf definierte, eingeschränkte, ebenfalls positiv definite sesquilineare Form $f\,|_k \colon V_k \times V_k \to K$. Diese hat als Matrixdarstellung die Form

$$A_k := [f\,|_k]_{\mathfrak{B}_k} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix}.$$

Somit muss aber gelten $\det(A_k) > 0$ nach Proposition 3.1 und damit auch, dass für $1 \leq k \leq n \; : \; \Delta_k(A) > 0$.
Damit wurden beide Richtungen und somit auch die Äquivalenzaussage bewiesen. ■

4. Abschliessende Schlussfolgerung

Sei also $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und ferner V endlich dim. $\mathbb{K}$-VR mit $\dim V = n \in \mathbb{N}$ und einer *beliebigen* geord. Basis $\mathfrak{B}$. Ferner sei $f \; : \; V \times V \to \mathbb{K}$ eine sesquilineare Form, wobei $A := [f]_{\mathfrak{B}}$.

Folgende Aussagen sind *äquivalent*:

(1) f ist eine **positiv semidefinite sesquilineare Form**,
(2) f ist *hermitesch* und für *alle* $\alpha \in V\ :\ f(\alpha,\alpha) \geq 0$,
(3) $A = A^*$ und für *alle* Skalare $x_1, \ldots, x_n\ :\ \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} A_{kj}x_j\bar{x}_k \geq 0$,
(4) die ebenfalls zwingend sesquilineare Form $g\ :\ \mathbb{K}^{n\times 1} \times \mathbb{K}^{n\times 1} \to \mathbb{K}$ mit $g(X,Y) = Y^*AX$ ist *positiv semidefinit*,
(5) A ist eine *positiv semidefinite Matrix*.

Ferner sind auch folgende Aussagen *äquivalent*:

(1) f ist eine **positiv definite sesquilineare Form**,
(2) f ist *hermitesch* und für *alle* $\alpha \in V\ :\ f(\alpha,\alpha) > 0$,
(3) $A = A^*$ und für *alle* Skalare $x_1, \ldots, x_n\ :\ \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} A_{kj}x_j\bar{x}_k > 0$,
(4) A ist eine *positiv definite Matrix*,
(5) die ebenfalls zwingend sesquilineare Form $g\ :\ \mathbb{K}^{n\times 1} \times \mathbb{K}^{n\times 1} \to \mathbb{K}$ mit $g(X,Y) = Y^*AX$ ist *positiv definit*,
(6) es *existiert* ein invertierbares $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $A = P^*P$,
(7) $A = A^*$ und für *alle* $1 \leq k \leq n\ :\ \Delta_k(A) > 0$.

Für eine **positiv definite sesquilineare Form** f ergeben sich aus den Äquivalenzaussagen *1. – 7.* die folgenden *Eigenschaften*:

i. f ist ein *inneres Produkt* auf V,
ii. $\det A > 0$.

Literatur

[1] *K. Hoffman, R. Kunze* Linear Algebra, Prentice- Hall, Inc., Englewood. (1971)
[2] *R. A. Horn, C. R. Johnson,* Matrix Analysis, Cambridge University Press Cliffs, N.J. 1971.
[3] *S. Kuhlmann,* Lineare Algebra II (Skript) http://www.math.uni-konstanz.de/ kuhlmann/Lehre/SS12-LinAlg2/Skripts/Gesamt-LinAlg2-SS2012.pdf (Stand: 14.11.2016 16:24)