Basiswissen über Bilinearformen mit Betrachtung symmetrischer Bilinearformen

Zhelun Chen

Proseminar Lineare Algebra WS2016/2017
Universität Konstanz

Zusammenfassung

In diesem Proseminar lernen wir einige Grundbegriffe über Bilinearformen kennen. Vorgestellt werden die darstellenden Matrizen, die Matrix des Basiswechsels, sowie der Rang der Bilinearform. Außerdem schauen wir einen speziellen Fall – die symmetrischen Bilinearformen – an, und untersuchen beispielsweise ihre Diagonalisierbarkeit.

Inhaltsverzeichnis

Notation

- $m, n, i, j, k, l \in \mathbb{N}$ $(0 \notin \mathbb{N})$;
- K ein Körper;
- V ein Vektorraum über dem Körper K;
- V^* der (algebraische) Dualraum zum Vektorraum V;
- $L(U, W)$ der Raum aller linearen Abbildungen von U nach W;
- $L(V, V; K)$ der Raum aller Bilinearformen von $V \times V$ nach K;
- $\mathrm{Mat}_n(K)$ der Raum aller $n \times n$ Matrizen über dem Körper K;
- A^t die Transponierte einer Matrix A;
- $[x]_{\mathcal{B}} \in K^n$ der Koordinatenvektor (als Spaltenvektor) von x bzgl. einer Basis $\mathcal{B}$
- $\dim_K(V) := \dim(V)$ die Dimension der Vektorraum V über dem Körper K.

Einleitung

In der vergangenen Vorlesung *Linearen Algebra* haben wir bereits eine spezielle Klasse von Bilinearformen, nämlich Skalarprodukte, studiert. Bilinearformen sind in dem Sinne allgemeiner, dass die Formen nicht positiv definit und symmetrisch sein müssen. In diesem Handout wollen wir sowohl allgemeine Bilinearformen als auch symmetrische Bilinearformen betrachten, wobei wir versuchen, den Stoff mit der frühen gewonnen Erkenntnissen aus der linearen Algebra in Verbindung zu bringen. Hauptsächlich wollen wir uns mit folgenden Fragen auseinandersetzen:

a) (Wie) Kann man eine Bilinearform (durch Matrizen) darstellen?

b) Wie hängen die Darstellungen (wenn sie überhaupt existieren) von einer Bilinearform bzgl. verschiedenen Basen zusammen?

c) Was soll den Rang einer Bilinearform sein?

d) Gibt es Basis, bzgl. welcher die Darstellung einer Bilinearform besonders einfach aussieht?

Das Handout besteht aus vier Abschnitten, die zur Frage a) – d) jeweils eine Antwort geben. Wir orientieren uns an [HK] und benutzen ein paar Beweismethoden aus [Fe].

1 Die darstellende Matrix der Bilinearform

Definition 1.1. Eine Abbildung $f : V \times V \to K$ heißt **Bilinearform** (kurz: BLF), wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

- $f(\lambda x_1 + x_2, y) = \lambda f(x_1, y) + f(x_2, y)$ und
- $f(x, \mu y_1 + y_2) = \mu f(x, y_1) + f(x, y_2)$,

für alle $x_1, x_2, y_1, y_2, x, y \in V$, $\lambda, \mu \in K$. In diesem Fall sagen wir auch, dass f eine **Bilinearform auf** V ist. Gilt zusätzlich $f(x, y) = f(y, x)$ für alle $x, y \in V$, so nennt man die Bilinearform **symmetrisch**.

Bemerkung 1.2. Eine BLF ist eine Abbildung, welche linear in jedem Argument ist.

Aus der linearen Algebra wissen wir, dass eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ die linearen Abbildungen $K^n \to K^n$, gegeben durch $(x \mapsto Ax)$ und $(x \mapsto x^t A)$, induziert. Eine ähnliche Situation bei BLF sieht folgendermaßen aus.

Beispiel 1.3. Seien $V := K^n$ und $A := (A_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Schreibe $x, y \in K^n$ als $x := (x_1, \ldots, x_n)^t, y := (y_1, \ldots, y_n)^t$, dann definiert die Funktion f gegeben durch $f(x, y) := x^t Ay = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j A_{ij}$ eine BLF.

Beweis. Wir rechnen direkt nach

$$\begin{aligned} f(\lambda x + x', y) &= \sum_{i,j=1}^{n} (\lambda x_i + x_i') y_j A_{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \lambda x_i y_j A_{ij} + \sum_{i,j=1}^{n} x_i' y_j A_{ij} \\ &= \lambda f(x, y) + f(x', y). \end{aligned}$$

Die Verifikation der Linearität in der zweiten Komponente zeigt man in ähnlicher Weise. □

Eine andere “natürliche” BLF ist folgendes.

Beispiel 1.4. Es seien $L_1, L_2 \in V^*$ lineare Funktionale. Die Funktion $f : V \times V \to K, (x, y) \mapsto L_1(x)L_2(y)$ definiert eine BLF.

Beweis. Seien $x, x', y \in V$, $\lambda \in K$. Wir berechnen $f(\lambda x + x', y) = L_1(\lambda x + x')L_2(y) = (\lambda L_1(x) + L_1(x'))L_2(y) = \lambda L_1(x)L_2(y) + L_1(x')L_2(y) = \lambda f(x, y) + f(x', y)$. Der Beweis für die Linearität in der zweiten Komponente läuft ganz analog. □

Als Nächstes wollen wir uns überlegen, ob und wie eine BLF – wie beim Studium linearer Abbildungen – durch eine Matrix dargestellt werden kann.

Definition 1.5. Seien $\dim(V) < \infty$, $\mathcal{B} := \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine (geordnete) Basis für V und f eine BLF auf V. So heißt $A := (A_{ij})_{i,j=1,\ldots n}$ mit $A_{ij} := f(b_i, b_j)$ **die darstellende Matrix** von f **bzgl.** $\mathcal{B}$, in Zeichen $[f]_{\mathcal{B}}$. Ist es aus dem Kontext klar, so sagen wir einfach, dass A **die Matrix von** f ist.

Der folgende Satz rechtfertigt den Ausdruck “die Matrix”.

Satz 1.6. *Seien* $\dim(V) < \infty$, $\mathcal{B} := \{b_1, \ldots, b_n\}$ *eine fest gewählte Basis von* V*. Dann ist*

$$\Phi : L(V, V; K) \to \mathrm{Mat}_n(K), \ \ f \mapsto [f]_{\mathcal{B}}$$

ein Vektorraum-Isomorphismus.

Beweis. (i) Wir zeigen, dass Φ bijektiv ist. Seien $x, y \in V$ mit $x := \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$ und $y := \sum_{i=1}^n \mu_i b_i$. Wir berechnen mittels der Bilinearität von f

$$f(x, y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j b_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j f(b_i, b_j). \tag{1}$$

Nach Wahl der x, y ist gerade $[x]_\mathcal{B} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t$, $[y]_\mathcal{B} = (\mu_i, \ldots, \mu_n)^t$ und $A_{ij} = f(b_i, b_j)$. Somit bedeutet (1) auch

$$f(x, y) = [x]^t_\mathcal{B} A[y]_\mathcal{B} \tag{2}$$

Ferner zeigt (2), dass die darstellende Matrix A eindeutig bestimmt ist durch die BLF f, d.h. Φ ist injektiv; Außerdem zeigt Beispiel 1.3, dass jede Matrix eine BLF definiert, d.h., Φ ist surjektiv. Damit ist Φ bijektiv.

(ii) Die Linearität von Φ folgt unmittelbar aus der punktweise Definition von Abbildungen: Sind nämlich $f, g \in L(V, V; K), \lambda \in K$, so finden wir $(\lambda f + g)(b_i, b_j) = \lambda f(b_i, b_j) + g(b_i, b_j)$ für jedes paar $(i, j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}$. Dies bestimmt alle Einträge von der darstellende Matrix. Also $[\lambda f + g]_\mathcal{B} = \lambda[f]_\mathcal{B} + [g]_\mathcal{B}$. Das ist genau die Linearität von Φ. $\square$

Korollar 1.7. *Ist* $\dim(V) = n$, *so ist* $\dim(L(V, V; K)) = n^2$.

Wir geben eine interessante Interpretation von Satz 1.6 an. Dazu benötigen wir folgendes Resultat.

Korollar 1.8. *Sei* $\mathcal{B} := \{b_1, \ldots, b_n\}$ *eine Basis von einem endlich-dimensionalen Vektorraum* V. *Sei* $\mathcal{B}^* := \{b_1^*, \ldots, b_n^*\}$ *die dazu duale Basis von* V^*. *Dann bildet* $(f_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ *mit* $f_{ij}(x, y) := b_i^*(x) b_j^*(y)$ *für alle* $x, y \in V$ *eine Basis von* $L(V, V; K)$.

Beweis. (i) Da b_i^* lineare Funktionale sind für alle i, folgt $f_{ij} \in L(V, V; K)$ aus Beispiel 1.4.
(ii) Aus Dimensionsgründen reicht es, die lineare Unabhängigkeit von $(f_{ij})_{i,j}$ zu prüfen: Seien $\lambda_{ij} \in K$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} f_{ij} = 0$. Wir rechnen nach

$$0 = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} f_{ij}(b_l, b_k) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} b_i^*(b_l) b_j^*(b_k) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} \delta_{il} \delta_{jk} = \lambda_{lk}$$

für jedes paar $(l, k) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}$, wobei δ_{ij} das Kronecker-Delta[1] bezeichnet. Es folgt die lineare Unabhängigkeit und somit ist $(f_{ij})_{i,j}$ eine Basis. $\square$

Bemerkung 1.9. Korollar 1.8 bedeutet, dass wir das wie oben definiertes f_{ij} mit der Basismatrix E^{ij} (sie hat in der i-ten Zeile und j-ten Spalte den Eintrag 1 und sonst überall 0) durch das Φ in Satz 1.6 identifizieren können. D.h. die Matrix von f_{ij} bzgl. $\mathcal{B}$ in Satz 1.6 ist E^{ij}. Z.B. für $V := K^2, \mathcal{B} := \{e_1, e_2\}$ (die Standardbasis des K^2) gilt einerseits $f_{12}(x, y) = e_1^*(x) e_2^*(y) = x_1 y_2$. Andererseits $f_{E^{12}}(x, y) = x E^{12} y = x_1 y_2$ wobei $x := (x_1, x_2)^t, y := (y_1, y_2)^t \in V$.

Eine wichtige Beziehung zwischen der darstellenden Matrix und der durch sie dargestellten BLF stellt folgender Satz dar.

Satz 1.10. *Seien* $\dim(V) < \infty$, $\mathcal{B}$ *eine Basis für* V *und* f *eine BLF auf* V. *Ferner sei* A *die Matrix von* f *bzgl. der Basis* $\mathcal{B}$. *Dann ist* f *genau dann symmetrisch, wenn* A *symmetrisch ist.*

[1] $\delta_{ij} = 1 \Leftrightarrow i = j$

Beweis. Es gilt für $x, y \in V$

$$K \ni f(x,y) = [x]^t_{\mathcal{B}} A [y]_{\mathcal{B}} = ([x]^t_{\mathcal{B}} A [y]_{\mathcal{B}})^t = [y]^t_{\mathcal{B}} A^t [x]_{\mathcal{B}}$$

und

$$f(y,x) = [y]^t_{\mathcal{B}} A [x]_{\mathcal{B}}.$$

Hierdurch (man beachte die Eindeutigkeit der Darstellung, vgl. Satz 1.6) sieht man, dass

$$f(x,y) = f(y,x) \Leftrightarrow A = A^t.$$

□

Bemerkung 1.11. Satz 1.10 drückt folgende Äquivalenz aus: Sei f eine BLF auf einem endlich-dimensioanlen Vektorraum V. Wenn wir *eine* Basis von V finden, bzgl. welcher die Matrix der Form symmetrisch ist, so ist die Form symmetrisch. Umgekehrt wenn wir wissen (rechnen per Definition 1.1), dass die Form symmetrisch ist, dann ist die Matrix der Form symmetrisch bzgl. irgendeiner Basis von V. Kurz gesagt: Die Symmetrie der Matrix(Darstellung) bedeutet die Symmetrie der Form und umgekehrt.

2 Die Matrix des Basiswechsels

Aus dem Studium der linearen Abbildung (auf endlich-dimensionalen Vektorräumen) wissen wir, dass zwei Matrizen A, B genau dann dieselbe lineare Abbildung darstellen, wenn sie *ähnlich* zueinander sind, d.h. es existiert invertierbare Matrix P, sodass $A = P^{-1}BP$. Interpretiert man das P als die Matrix des Basiswechsels, so kann die Gleichung $A = P^{-1}BP$ als eine Formel der Basis-Transformation verstanden werden. Im Fall der BLF liegt eine ähnliche Situation vor, jedoch ist die entsprechende Formel etwas anders. Bevor wir dies näher untersuchen, wollen wir einige Bezeichnungen erklären.

Bemerkung 2.1. Seien $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ zwei Basen von einem endlich-dimensionalen Vektorraum V. Für eine lineare Abbildung f bezeichne $[f]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ die darstellende Matrix von f bzgl. $\mathcal{B}'$ und $\mathcal{B}$, genauer, wir stellen das Bild eines Basisvektors in $\mathcal{B}'$ mittels der Basisvektoren in $\mathcal{B}$ dar, d.h.

$$f(b'_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} b_i$$

für $b'_j \in \mathcal{B}', b_i \in \mathcal{B}$. Und $\lambda_{ij}, \ldots, \lambda_{nj}$ bildet die j-te Spalte von $[f]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$. Dieser Notation nach erinnern wir uns an die Aussage

$$[f(x)]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} [x]_{\mathcal{B}'}.$$

Und daher gilt

$$[x]_{\mathcal{B}} = [\mathrm{id}_V(x)]_{\mathcal{B}} = [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} [x]_{\mathcal{B}'} = P[x]_{\mathcal{B}'}.$$

mit $P := [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

Nun beweisen wir die Formel für die Matrix des Basiswechsels für den Fall der BLF.

Satz 2.2. *Seien* $\dim(V) < \infty$, $\mathcal{B}$ *und* $\mathcal{B}'$ *zwei Basen von* V *sowie* f *eine BLF auf* V. *Schreibe* $A := [f]_{\mathcal{B}}, A' := [f]_{\mathcal{B}'}$ *und* $P := [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$. *Die gesuchte Basistransformationsformel ist dann gegeben durch*

$$A' = P^t AP.$$

Beweis. Seien $x, y \in V$. Wir weisen nach

$$f(x,y) = [x]_{\mathcal{B}}^t A[y]_{\mathcal{B}} = (P[x]_{\mathcal{B}'})^t A(P[y]_{\mathcal{B}'}) = [x]_{\mathcal{B}'}^t (P^t AP)[y]_{\mathcal{B}'}.$$

Aus der Eindeutigkeit der Darstellung (vgl. Satz 1.6) folgt nun die Behauptung. □

Beispiel 2.3. Es seien f das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{E} := \{e_1, e_2\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{B} := \{(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})^t, (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})^t\}$ eine andere Basis. Dann bekommen wir die Darstellung einerseits aus der Definition 1.5

$$[f]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Andererseits erhalten wir $[f]_{\mathcal{B}} = P^t[f]_{\mathcal{E}}P$ mit $P := [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

3 Der Rang der Bilinearform

Wir haben erfahren, dass der Rang der linearen Abbildung – eine bloße natürliche Zahl – wichtige Eigenschaften wie z.B. die Invertierbarkeit dieser Abbildung vorstellt. Wir werden sehen, dass diese Zahl im Fall der BLF eine sonderliche Klasse von BLF charakterisiert.

Definition 3.1. Seien f eine BLF auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V und $\mathcal{B}$ eine (beliebige) Basis von V. Der **Rang** von f ist definiert durch

$$\mathrm{rk}(f) := \mathrm{rk}([f]_{\mathcal{B}}).$$

Bemerkung 3.2. Nach Satz 2.2 ist die Definition 3.1 tatsächlich von der Wahl der Basis unabhängig.

Wir geben gleich eine Charakterisierung des Ranges.

Satz 3.3. *Seien* $\dim(V) < \infty$ *und* f *eine BLF auf* V. *Es sind äquivalent:*

(i) $\mathrm{rk}(f) = \dim(V)$.

(ii) $\forall x \in V\backslash\{0\}\ \exists y \in V : f(x,y) \neq 0$.

(iii) $\forall y \in V\backslash\{0\}\ \exists x \in V : f(x,y) \neq 0$.

Beweis. Wir zeigen zunächst $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V und schreibe $A := [f]_{\mathcal{B}}$ und $[x] := [x]_{\mathcal{B}}$ für alle $x \in V$. Wir gehen von (ii) aus.
(ii) $\Leftrightarrow$ Für jedes feste $x \in V\backslash\{0\}$: $(V \to K,\ y \mapsto f(x,y)) \not\equiv 0$.
$\Leftrightarrow x \in V\backslash\{0\} : (K^n \to K,\ [y] \mapsto [x]^t A[y]) \not\equiv 0$.
$\Leftrightarrow \forall x \in V\backslash\{0\} : [x]^t A \not\equiv 0$.

$\Leftrightarrow \ker([x] \mapsto [x]^t A) = \{0\}$.
$\Leftrightarrow (K^n \to K^n,\ [x] \mapsto [x]^t A)$ ist injektiv.
$\Leftrightarrow (K^n \to K^n,\ [x] \mapsto [x]^t A)$ ist surjektiv aus dem Rangsatz. $\Leftrightarrow$ (i).
Für (i)$\Leftrightarrow$(iii) betrachte man die Abbildung $(x \mapsto f(x, y))$ bzw. $([x] \mapsto [x]^t A[y])$ für festes $y \in V \backslash \{0\}$ und folgere analog. $\square$

Definition 3.4. Seien $\dim(V) < \infty$ und f eine BLF auf V. Erfüllt f eine Aussage von Satz 3.2, so heißt f **nicht-ausgeartet**.

Beispiel 3.5. Sei $V := \mathbb{R}^2$ und f sei gegeben durch $f((x_1, x_2)^t, (y_1, y_2)^t) := x_1 y_1 - y_2 x_2$. Dann ist f eine nicht-ausgeartete BLF auf $\mathbb{R}^2$.

Beweis. Wähle die Standardbasis $\mathcal{B} := \{e_1, e_2\}$ von V. Dann ist $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Somit ist $\mathrm{rk}(f) = \mathrm{rk}([f]_{\mathcal{B}}) = 2 = \dim(V)$. Also ist f nicht-ausgeartet. $\square$

4 Diagonalisieren der symmetrischen Bilineaform

Nachdem wir einige Eigenschaften von allgemeinen BLF studiert haben, wenden wir uns nun zu einem speziellen Fall, der symmetrische BLF. Zur Untersuchung dieser Formen ist folgende Definition hilfreich.

Definition 4.1. Sei f eine symmetrische BLF auf einem beliebigen Vektorraum V. Die **quadratische Form zu f** ist die Abbildung

$$q : V \to K,\ x \mapsto q(x) := f(x, x).$$

Lemma 4.2. *Seien K ein Körper mit Charakteristik $\mathrm{Char}(K) \neq 2$, f eine symmetrische BLF auf V und q die quadratische Form zu f. Dann gilt für alle $x, y \in V$*

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y)).$$

Beweis. Seien $x, y \in V$. Es ist $q(x+y) - q(x) - q(y) = f(x+y, x+y) - f(x, x) - f(y, y) = f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y) - f(x, x) - f(y, y) = 2f(x, y)$. Da $\mathrm{Char}(K) \neq 2$, können wir die Gleichung mit $\frac{1}{2}$ multiplizieren. Die Behauptung folgt. $\square$

Definition 4.3. Sei f eine *symmetrische* BLF auf V. Zwei Vektoren $x, y \in V$ heißen **orthogonal** bzgl. f (in Zeichen $x \perp y$)[2], wenn $f(x, y) = 0$. Eine **Orthogonalbasis** ist eine Basis von V, deren Elemente paarweise orthogonal (bzgl. f) sind. Schließlich, ist $U \subset V$ ein Untervektorraum, so heißt

$$U^\perp := \{x \in V : x \perp y \text{ für alle } y \in U\}$$

der **Orthogonalraum** zu U.

Lemma 4.4. *Sei U ein Untervektorraum von V. Dann ist $U^\perp$ ein Untervektorraum von V.*

[2] genauer $x \perp_f y$

Beweis. Es seien f eine symmetrische BLF, U ein Untervektorraum von V; Seien $x, y \in U^\perp, z \in U, \lambda$ ein Skalar. Wir berechnen

$$f(\lambda x + y, z) = \lambda f(x, z) + f(y, z) = \lambda \cdot 0 + 0 = 0.$$

D.h. $\lambda x + y \in U^\perp$, also ist $U^\perp$ ein Untervektorraum von V. □

Satz 4.5. *Sei* $\mathrm{Char}(K) \neq 2$, $\dim(V) < \infty$. *So gibt es zu jeder symmetrischen BLF auf* V *eine Orthogonalbasis.*

Beweis. Seien f eine BLF auf V und q die zugehörige quadratische Form. Wir führen eine Induktion nach $n := \dim(V)$ durch. Zunächst wollen wir zwei triviale Fälle ausschließen.

(i) Für $n = 1$ ist jede Basis orthogonal.

(ii) Für $f \equiv 0$ ist jede Basis ebenfalls orthogonal.

Abgesehen davon behaupten wir, dass es ein $x \in V$ gibt mit $q(x) \neq 0$: Ist $q(x) = 0$ für alle $x \in V$, dann liefert Lemma 4.2, dass $f \equiv 0$, was wir gerade ausgeschlossen haben.

Sei also $x_1 \in V$ mit $q(x_1) \neq 0$. Setze $U := Kx_1$. Wir behaupten: $V = U \oplus U^\perp$. Zu zeigen sind

(a) $U \cap U^\perp = \{0\}$.

(b) $\forall x \in V \ \exists x' \in U \ \exists x'' \in U^\perp : x = x' + x''$.

Zu (a). Sei $x \in U \cap U^\perp$. Dann gibt es ein $\lambda \in K, x = \lambda x_1$. Da x auch im Orthogonalraum zu U liegt, folgt

$$0 = f(x, x_1) = \lambda q(x_1).$$

Da $q(x_1) \neq 0$ war, folgt $\lambda = 0$ bzw. $x = 0$.
Zu (b). Sei $x \in V$. Definiere $\pi_U(x) := \frac{f(x,x_1)}{f(x_1,x_1)} x_1 \in U$. Dann gilt

$$f(x_1, x - \pi_U(x)) = f(x_1, x) - f(x_1, \pi_U(x)) = f(x_1, x) - f(x, x_1) = 0,$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Symmetrie von f folgt. Dies bedeutet nichts anderes als $x - \pi_U(x) \in U^\perp$. Damit ist die Summe direkt.

Da $U^\perp$ eine Dimension niedriger ist als V, existiert nach Induktionshypothese eine Orthogonalbasis $\{x_2, \ldots, x_n\}$ von $U^\perp$ und $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ist dann eine gewünschte Orthogonalbasis von V. □

Korollar 4.6. *Sei* $\mathrm{Char}(K) \neq 2$. *Zu* $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ *mit* $A = A^t$ *gibt es invertierbares* P *derart, dass* $P^t A P$ *eine Diagonalmatrix ist.* (*Daher die Terminologie Diagonalisieren*)

Beweis. Wähle P als die Matrix des Basiswechsels von einer beliebigen Basis $\mathcal{B}$ zu der Orthogonalbasis $\mathcal{B}'$ wie in Satz 4.5, i.e. $P = [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$. Wende nun Satz 2.2 an um die gewünschte Darstellung von $[f]_{\mathcal{B}'}$ zu gewinnen. □

Korollar 4.7. *Ist* $K = \mathbb{R}$ *im obigen Korollar, so kann* P *orthogonal gewählt werden.*

Beweis. Vgl. Satz über Hauptachsentransformation, z.B. in [Fe, Kap.VI, Satz 7.3]. □

Satz 4.8. *Seien dim*$(V) < \infty$, $K := \mathbb{R}$ *und* f *eine BLF auf* V *mit* $\mathrm{rk}(f) := r$. *Dann existiert eine Basis* $\mathcal{B} := \{b_1, \dots, b_n\}$ *mit der Eigenschaften*

(i) $[f]_{\mathcal{B}}$ ist diagonal.

(ii) $f(b_i, b_i) = \begin{cases} \pm 1, & 1 \leq i \leq r \\ 0, & i > r \end{cases}$.

Beweis. Nach Satz 4.5 existiert bereits eine Basis $\mathcal{B}' := \{b'_1, \dots, b'_n\}$ von V mit $[f]_{\mathcal{B}'}$ eine Diagonalmatrix. Nach Definition von Rang gilt $\mathrm{rk}(f) = \mathrm{rk}([f]_{\mathcal{B}'})$, also $f(b'_i, b'_i) = 0 \Leftrightarrow i > r$. (Diese Äquivalenz bekommen wir eventuell nach Permutation von Zeilen der darstellenden Matrix). Demnach wählen wir b_i mit

$$b_i := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|f(b'_i, b'_i)|}}, & 1 \leq i \leq r \\ b'_i \quad , & i > r \end{cases}.$$

Setze $\mathcal{B} := \{b_1, \dots, b_n\}$. Dann hat $\mathcal{B}$ die gewünschten Eigenschaften. □

Bemerkung 4.9. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$; Satz 4.8 besagt, dass zu jeder symmetrischen BLF f auf V mit Rang r eine Basis $\mathcal{B}$ von V existiert, sodass

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} I_{r_+} & & \\ & -I_{r_+} & \\ & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$$

mit $r_+ + r_- = r$, wobei I_{r_+} die $r_+ \times r_+$ Einheitsmatrix (analog für I_{r_-}) bezeichnet.

Ferner kann man zeigen, dass r_+ und r_- nur von f abhängen, nicht von der Darstellung $[f]_{\mathcal{B}}$ für irgendeine Basis $\mathcal{B}$. Dies ist die Kernaussage vom *Trägheitssatz von Sylvester*[3]. Für den Beweis dieses Theorems verweisen wir auf [HK, Ch.10, Theorem 5] und [Fe, Kap.VI, Theorem 7.9].

Literatur

[Fe] A. Fehm: Skript zur Vorlesung *Lineare Algebra I/II*, Univeristät Konstanz 2014-2015.

[HK] K. Hoffman, R. Kunze: *Linear Algebra*, Prentice-Hall 1971.

[3] James Joseph Sylvester (1814–1897)