Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2016

Margaret Thomas
Julian Weißer

Übungsblatt 1 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. (Pythagoräische Tripel)

Gib alle primitiven pythagoräischen Tripel (a, b, c) mit $1 \leq a < b < c$ und $a \leq 14$ an.

Aufgabe 2. (Wie viele Einheiten hat $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?)

Bezeichne φ die Eulersche Phi-Funktion. Beweise Bemerkung 1.1.11 aus der Vorlesung:

(a) Für zwei teilerfremde Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ gilt stets $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

(b) Ist $p \in \mathbb{P}$ und $k \in \mathbb{N}$, so gilt $\varphi(p^k) = (p-1)p^{k-1}$.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\varphi(n) = n \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \mid n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Hinweis: Verwende in Teil (a) den Chinesischen Restsatz.

Aufgabe 3. (Die algebraischen Zahlen sind abzählbar.)

Eine Menge M heißt höchstens abzählbar, wenn es eine Surjektion $g : \mathbb{N} \to M$ gibt.

(a) Zeige, dass eine höchstens abzählbare Vereinigung von höchstens abzählbaren Mengen wiederum höchstens abzählbar ist.

(b) Benutze (a), um zu zeigen, dass die Menge der über $\mathbb{Q}$ algebraischen Zahlen $\{x \in \mathbb{C} \mid \exists q \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\} : q(x) = 0\}$ höchstens abzählbar ist.

Aufgabe 4. (Zahlenspiele)

Zeige die folgenden Aussagen:

(a) Bezeichne p_k die k-te Primzahl. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$p_{k+1} \leq \prod_{j=1}^{k} p_j + 1.$$

(b) Seien $a, n \in \mathbb{N}$ mit $a > n$. Dann gilt $n \mid \varphi(a^n - 1)$.

(c) Berechne möglichst effizient - und natürlich ohne elektronischen Rechner - die letzten zwei Stellen von 3^{1000} in der Dezimaldarstellung.

Abgabe bis Donnerstag, den 21. April um 10:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.