Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2016

Margaret Thomas
Julian Weißer

Übungsblatt 2 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. (Dirichlet)

Zeige:

(a) Jede Primzahl $p > 3$ ist von der Form $6k + 1$ oder $6k - 1$ mit $k \in \mathbb{N}$

und damit folgenden Spezialfall des Primzahlsatzes von Dirichlet:

(b) Es gibt unendlich viele Primzahlen der Form $6k - 1$.

Aufgabe 2. (Transzendenz)

Zeige mit dem Satz von Liouville, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{n!}}$$

für $a \in \mathbb{Z}$ mit $a \geq 2$ transzendent ist.

Aufgabe 3. (Primelemente in $\mathbb{Z}[i]$)

Zeige, dass die Primelemente des Rings $\mathbb{Z}[i]$ der Gaußschen Zahlen bis auf Assoziiertheit genau die folgenden sind:

(a) $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ mit $a^2 + b^2 = p \in \mathbb{P}$.

(b) $p \in \mathbb{P}$ mit $p \equiv 3 \pmod 4$.

Aufgabe 4. (Eine elliptische Gleichung)

Finde alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $y^2 + 1 = x^3$ in $\mathbb{Z}$. Die folgenden Schritte sind als Anleitung gedacht, andere Lösungswege sind aber auch willkommen.

(a) Offensichtlich ist x genau dann gerade, wenn y ungerade ist. Muss x gerade oder ungerade sein?

(b) Zerlege die linke Seite im Ring der Gaußschen Zahlen in Linearfaktoren $y - (a_1 + b_1 i)$ und $y - (a_2 + b_2 i)$ und zeige, dass diese koprim sind.

(c) Folgere, dass die beiden Linearfaktoren dritte Potenzen sind, sich also in der Form $y - (a + bi) = (c + di)^3$ mit $c, d \in \mathbb{Z}$ schreiben lassen. Multipliziere aus und vergleiche die Real- und Imaginärteile.

Abgabe bis Donnerstag, den 28. April um 10:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.