Universität Konstanz Margaret Thomas
Fachbereich Mathematik und Statistik Julian Weißer
Sommersemester 2016

Übungsblatt 4 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. (Beispiele von Moduln)

(a) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Wird $\mathrm{End}(V)$ mit der üblichen Addition und der Skalarmultiplikation

$$K[X] \times \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V), (p, f) \mapsto p(f)$$

zu einem $K[X]$-Modul? Hierbei sei $p(f) = \sum_{i=0}^{d} a_i f^i$ für ein Polynom $p = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ und f^i für eine lineare Abbildung f bezeichne ihre i-fache Hintereinanderschaltung.

(b) Sei $S := \mathbb{Z} \setminus (2) = \{s \in \mathbb{Z} \mid 2 \nmid s\}$ und $\mathbb{Z}_{(2)} := S^{-1}\mathbb{Z} = \{\frac{a}{s} \mid a, s \in \mathbb{Z}, 2 \nmid s\}$. Ist $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ein $\mathbb{Z}_{(2)}$-Modul?

(c) Finde ein Beispiel für einen Ring R (nicht notwendigerweise kommutativ oder mit 1) und einen R-Modul, der frei ist, aber keine Basis besitzt.

Rechne zum Beweis nur die nichttrivialen Axiome nach, im negativen Fall genügt wie immer ein verletztes Axiom!

Aufgabe 2. (Homomorphiesatz)

Sei R ein kommutativer Ring. Sei L ein R-Modul, M und N Untermoduln von L. Zeige, dass

$$M/(M \cap N) \cong (M + N)/N$$

als R-Moduln.

Aufgabe 3. (Basen)

Zeige, dass jeder endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-Untermodul von $\mathbb{Q}$ frei vom Rang 1 ist, $\mathbb{Q}$ selbst aber nicht frei als $\mathbb{Z}$-Modul ist.

Aufgabe 4. (Endlich erzeugte Moduln)

Sei R ein kommutativer Ring mit $0 \neq 1$. Zeige, dass R genau dann ein Körper ist, wenn jeder endlich erzeugte R-Modul frei ist.

Abgabe bis Donnerstag, den 12. Mai um 10:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.