Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2016

Margaret Thomas
Julian Weißer

Übungsblatt 5 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. (Exakte Sequenzen)

Sei R ein Ring. Ein Diagramm von R-Modulhomomorphismen

$$\ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \ldots$$

heißt *exakte Sequenz*, wenn $\operatorname{im}(f_{i-1}) = \ker(f_i)$ für alle i gilt.

Bezeichne 0 den Nullmodul über R. Zeige:

(a) Ist $f : M \to N$ ein Modulhomomorphismus, so gilt $f(M_{\text{tor}}) \subseteq N_{\text{tor}}$.

(b) Ist die Sequenz $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ exakt, so auch

$$0 \longrightarrow L_{\text{tor}} \xrightarrow{f|_{L_{\text{tor}}}} M_{\text{tor}} \xrightarrow{g|_{M_{\text{tor}}}} N_{\text{tor}}.$$

Aufgabe 2. (Annihilator)

Sei R ein Hauptidealring, M ein R-Modul. Sei $x \in M_{tor}$ und a eine Periode von x, außerdem $p \in R$ prim. Zeige:

(a) $Rx \cong R/(a)$.

(b) Gilt $p \mid a$, so ist $R/(p) \cong Rx/pRx$.

(c) Gilt $p \nmid a$, so ist $pRx = Rx$.

Aufgabe 3. (Periode)

Sei R ein Hauptidealring, M ein endlich erzeugter R-Modul und $p \in R$ prim. Zeige:

(a) $M[p^\infty]$ ist endlich erzeugt.

(b) Es gibt ein minimales $n \in \mathbb{N}$ mit $M[p^n] = M[p^\infty]$.

(c) Es gibt ein maximales $n \in \mathbb{N}$ so, dass p^n Periode eines $x \in M$ ist.

(d) Es gibt genau ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $M[p^n] = M[p^\infty]$ gilt und p^n Periode eines $x \in M$ ist.

Abgabe bis Donnerstag, den 19. Mai um 10:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.