Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2016

Margaret Thomas
Julian Weißer

Übungsblatt 6 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. (Struktursatz)

Jede abelsche Gruppe ist ein $\mathbb{Z}$-Modul. Benutze den Struktursatz für endlich erzeugte Moduln, um (bis auf Isomorphie) alle abelschen Gruppen mit 360 Elementen zu bestimmen.

Aufgabe 2. (Satz von Cayley-Hamilton für Moduln)

Sei R ein kommutativer Ring, M ein endlich erzeugter freier R-Modul mit Basis $x_1, \dots, x_n$ und $\varphi \in \mathrm{End}(M)$ ein Endomorphismus von M. Sei $A \in R^{n \times n}$ die Darstellungsmatrix von φ bezüglich der Basis $x_1, \dots, x_n$, und sei $\chi_A := \det(A - XI_n) \in R[X]$ das charakteristische Polynom von A. Zeige:

(a) Der R-Modul M wird durch die Skalarmultiplikation $Xv := \varphi(v)$ zu einem $R[X]$-Modul.

(b) Im $R[X]$-Modul M ist $\chi_A x_i = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

(c) Im Ring $R^{n \times n}$ ist $\chi_A(A) = 0$.

Aufgabe 3. (Artinsche und noethersche Moduln)

Sei R ein kommutativer Ring. Ein R-Modul heißt *artinsch*, wenn jede absteigende Kette

$$N_1 \supseteq N_2 \supseteq \dots$$

von Untermoduln von M stationär wird. Der Ring R heißt artinsch, wenn er als R-Modul artinsch ist.

(a) Sei N ein Untermodul des Moduls M. Zeige: M ist genau dann artinsch, wenn N und M/N artinsch sind.

(b) Zeige, dass jedes Primideal eines artinschen Ringes maximal ist. Folgere, dass ein artinscher Integritätsring schon ein Körper ist.

Abgabe bis **Mittwoch, den 25. Mai** um 10:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.