
Übungsblatt 7 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. (Beispiele)

(a) Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $K[X_1, \dots, X_n]$ noethersch ist.

(b) Sei K weiterhin ein Körper. Ist der Unterring

$$R := \{c + Xg \mid c \in K, g \in K[X, Y]\}$$

von $K[X, Y]$ noethersch?

(c) Ist der Ring der stetigen Funktionen $C(\mathbb{R})$ noethersch?

(d) Finde einen Ring, der noethersch, aber nicht artinsch ist.

Aufgabe 2. (Erweiterungen)

Sei R ein noetherscher kommutativer Ring und $S := R[a_1, \dots, a_n]$ eine endliche Ring-
erweiterung von R . Zeige, dass S noethersch ist.

Aufgabe 3. (Ganze Erweiterungen)

Sei $A \subseteq B$ eine ganze Erweiterung integerrer Ringe. Zeige: A ist genau dann ein Körper,
wenn B ein Körper ist.

Ist die Forderung nach Nullteilerfreiheit nötig?

Aufgabe 4. (Ganze Beispiele)

(a) Zeige, dass jeder faktorielle Ring ganzabgeschlossen ist.

(b) Untersuche, ob die folgenden komplexen Zahlen ganz über \mathbb{Z} sind:

$$\frac{23}{5}, \sqrt{3 - \sqrt{5}} + 3^{\frac{2}{9}}, \exp\left(\frac{2\pi i}{13}\right)$$

Abgabe bis Donnerstag, den 2. Juni um 10:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.