Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2016

Margaret Thomas
Julian Weißer

Übungsblatt 8 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. (Ganzer Abschluss)

(a) Zeige, dass $\alpha := \sqrt{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}}$ ganz über $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ ist, $\operatorname{MinPoly}(\alpha|\mathbb{Q}(\sqrt{-3}))$ aber nicht in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}][X]$ liegt. Warum ist das kein Widerspruch zu Satz 2.4.14?

(b) Bestimme den ganzen Abschluss von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.

Hinweis: Die Vorlesung schlägt in Kapitel 1.4 einen Ring vor.

Aufgabe 2. (Norm über endlichen Körpern)

Sei $L|K$ eine Erweiterung endlicher Körper. Zeige, dass dann die Normabbildung $N_{L|K} : L \to K$ surjektiv ist.

Hinweis: Verwende ohne Beweis die Tatsache aus der Algebra, dass die Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(L|K)$ von einer Potenz des Frobenius erzeugt wird, um die Norm in der Form $N_{L|K}(x) = x^a$ darzustellen.

Aufgabe 3. (Norm algebraischer Erweiterungen)

Sei $f := X^3 + 3X^2 + 2 \in \mathbb{Q}[X]$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f. Berechne $\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}}(x)$ und $\mathrm{Sp}_{\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}}(x)$ für $x \in \mathbb{Q}(\alpha)$. Überlasse das Ausrechnen der Determinante einer Maschine oder einem Hörer der linearen Algebra!

Aufgabe 4. (Diskriminante)

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $f = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i) \in K[X]$ mit $\alpha_i \in \overline{K}$. Zeige:

$$\Delta_f = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} f'(\alpha_i).$$

(b) Sei nun $f := X^n + aX + b \in K[X]$. Zeige:

$$\Delta_f = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} ((1-n)^{n-1}a^n + n^n b^{n-1}).$$

Hinweis: Rechne für Teil (b) den Ausdruck $f\left(\frac{nb}{a(1-n)}\right)$ auf zwei Arten aus: Erstens durch einfaches Einsetzen und zweitens über die Linearfaktorzerlegung von f im algebraischen Abschluss. Verwende dann (a).
Für jede Nullstelle α_i von f gilt natürlich $\alpha_i^n + a\alpha_i + b = 0$.

Abgabe bis Donnerstag, den 9. Juni um 10:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.