**Universität Konstanz**
**Fachbereich Mathematik und Statistik**
**Sommersemester 2016**

Margaret Thomas
Julian Weißer

---

# Übungsblatt 9 zur Zahlentheorie

---

**Aufgabe 1.** (Einheiten und Ganzheitsringe)

Sei $d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei und $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

(a) Zeige, dass $\mathcal{O}_K^\times$ für $d < 0$ endlich ist und bestimme $\mathcal{O}_K^\times$ explizit.

(b) Zeige, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{12}]$ und $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$ nicht faktoriell sind.

**Hinweis:** Auf Blatt 8 haben wir in Aufgabe 1 schon exemplarisch für $d = -3$ den Ganzheitsring eines quadratischen Zahlkörpers bestimmt. In den Übungsgruppen werden wir die Verallgemeinerung auf beliebige $d$ besprechen. Daher darf Beispiel 3.1.5 ohne weitere Rechnung benutzt werden.

**Aufgabe 2.** (Matrizen über Hauptidealringen)

Sei $R$ ein Hauptidealring. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathrm{GL}_n(R)$ die Menge der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über $R$. Zeige:

(a) $\mathrm{GL}_n(R) = \{P \in R^{n\times n} \mid \det(P) \in R^\times\}$.

(b) Für $A \in R^{m\times n}$ gibt es invertierbare Matrizen $P \in \mathrm{GL}_m(R)$ und $Q \in \mathrm{GL}_n(R)$ so, dass $PAQ$ Diagonalgestalt hat.

**Aufgabe 3.** (Matrizen und Quotienten)

Seien $R$ ein kommutativer Ring, $m, n \in \mathbb{N}$ und seien $A, S \in R^{m\times n}$, $P \in \mathrm{GL}_m(R)$ und $Q \in \mathrm{GL}_n(R)$ mit $S = PAQ$. Zeige:

(a) Die Abbildung $R^m / \operatorname{im}(A) \to R^m / \operatorname{im}(S), \overline{x} \mapsto \overline{Px}$ ist ein Modulisomorphismus.

(b) Ist $S$ sogar eine Diagonalmatrix mit Einträgen $s_{11}, \dots, s_{kk} \neq 0$ und $0$ sonst, so gilt

$$R^m / \operatorname{im}(A) \cong R^{m-k} \times \prod_{i=1}^{k} (R/(s_{ii}))\,.$$

*Bemerkung.* Man kann mit etwas mehr Aufwand in Aufgabe 2 sogar erreichen, dass $S$ in Smithscher Normalform ist, d.h. dass die Diagonaleinträge eine aufsteigende Teilerkette bilden. Damit und mit Aufgabe 3 kann man einen alternativen Beweis des Struktursatzes für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen führen.

**Aufgabe 4.** (Diskriminante von Gittern)
Sei $K$ ein algebraischer Zahlkörper vom Grad $n$ und $G$ ein vollständiges Gitter von $K$ mit Basis $x_1, \ldots, x_n$. Weiter sei $H \subseteq G$ ein vollständiges Gitter. Zeige:

(a) Die Diskriminante
$$\Delta(G) := \Delta_{K|\mathbb{Q}}(x_1, \ldots, x_n)$$
von $G$ ist wohldefiniert, das heißt, sie hängt nicht von der Wahl der Basis $x_1, \ldots, x_n$ von $G$ ab.

(b) Der Index $[G : H]$ der Untergruppe $H$ von $G$ ist endlich und es gilt
$$\Delta(H) = [G : H]^2 \Delta(G).$$

**Abgabe** bis Donnerstag, den 16. Juni um 10:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.