Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2016

Margaret Thomas
Julian Weißer

Übungsblatt 10 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. (Ordnungen)

(a) Sei K ein Zahlkörper vom Grad n und $G \subseteq K$ ein vollständiges Gitter. Zeige, dass es ein $s \in \mathbb{N}$ mit $sG \subseteq \mathcal{O}_K$ und $s\mathcal{O}_K \subseteq G$ gibt.

(b) Sei K ein quadratischer Zahlkörper. Zeige, dass die Ordnungen in K genau durch $R_s := \mathbb{Z} + s\mathcal{O}_K$ mit $s \in \mathbb{N}$ gegeben sind.

Hinweis: Wähle für eine Ordnung R die kleinste Zahl $s \in \mathbb{N}$ mit $s\mathcal{O}_K \subseteq R$.

Aufgabe 2. (Diskriminantenbeispiel)
Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\alpha^3 - \alpha^2 - 2\alpha - 2 = 0$, sei $K := \mathbb{Q}(\alpha)$. Berechne die Diskriminante von $\mathbb{Z}[\alpha]$ und zeige $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$.

Aufgabe 3. (Bewertungsringe)

Sei v eine diskrete Bewertung auf dem Körper K. Zeige:

(a) $\mathcal{O}_v$ ist ein Hauptidealring.

(b) $\mathcal{O}_v$ ist lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}_v$.

(c) $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_v) = K$.

Aufgabe 4. (Ideale in Bewertungsringen)

Zeige:

(a) Ist R ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal (π), so ist jedes nichttriviale Ideal von R von der Form (π^n) für ein $n \in \mathbb{N}$.

(b) Ist R ein Integritätsring und gibt es ein $\pi \in R$ so, dass jedes nichttriviale Ideal von R die Form (π^n) hat, so ist R ein diskreter Bewertungsring.

(c) Es gibt diskrete Bewertungen auf $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{F}_p(X)$, aber nicht auf $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{F}_{p^n}$.

Abgabe bis Donnerstag, den 23. Juni um 10:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.