Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2016

Margaret Thomas
Julian Weißer

Übungsblatt 11 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. (Beispiele)

Welche der folgenden Ringe sind Dedekindringe?

(a) $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$

(b) $\mathbb{Z}[\sqrt{113}]$

(c) $\mathbb{Z}[X]$

(d) Der ganze Abschluss von $\mathbb{Z}$ im Körper $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ der algebraischen Zahlen.

Finde außerdem je ein Beispiel für:

(e) Einen Dedekindring, der nicht faktoriell ist.

(f) Einen faktoriellen Ring, der kein Dedekindring ist.

Aufgabe 2. (Primideale in Dedekindringen)

Sei R ein kommutativer Ring, seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \lhd R$ und $\mathfrak{p}$ Primideal von R. Zeige:

(a) $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p} \Longrightarrow (\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p})$.

(b) Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ teilerfremd, so auch $\mathfrak{a}^k$ und $\mathfrak{b}^n$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3. (Quotienten und Hauptideale)

Sei R ein Dedekindring, $(0) \neq \mathfrak{p} \lhd R$ ein Primideal und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $R/\mathfrak{p}^n$ nur endlich viele Ideale hat, die allesamt Hauptideale sind.

Aufgabe 4. (Gebrochene Ideale)

Sei R ein noetherscher Integritätsring mit Quotientenkörper K und seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ gebrochene R-Ideale mit $\mathfrak{b} \neq (0) \neq \mathfrak{c}$.

(a) Zeige, dass $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} := \{x \in K \mid x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\}$ ein gebrochenes R-Ideal ist.

Beweise oder widerlege:

(b) $\mathfrak{b} \cdot (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$.

(c) $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c} = \mathfrak{a} : (\mathfrak{b}\mathfrak{c})$.

Zusatzaufgabe für Interessierte, nicht Interessierte und Frustrierte.

Sei R ein Dedekindring und $(0) \neq I \lhd R$. Zeige:

(a) R/I hat nur endlich viele Ideale, die wiederum alle Hauptideale sind.

(b) Für alle $0 \neq a \in I$ gibt es ein $b \in I$ mit $I = (a, b)$. Insbesondere lässt sich jedes Ideal von R mit höchstens zwei Elementen erzeugen.

Abgabe bis Donnerstag, den 30. Juni um 10:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.