Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2016

Margaret Thomas
Julian Weißer

Übungsblatt 12 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1. (Kein primitives Element)

Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha + 8 = 0$ und $K := \mathbb{Q}(\alpha)$. Zeige:

(a) $\beta := \frac{\alpha^2+\alpha}{2}$ ist ganz über $\mathbb{Z}$.

(b) $\Delta_{K|\mathbb{Q}}(\alpha) = -4 \cdot 503$; folgere geschickt $\Delta_{K|\mathbb{Q}}(1, \alpha, \beta) = -503$ und $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha, \beta]$.

(c) Für jedes $x \in \mathcal{O}_K$ ist $\Delta_{K|\mathbb{Q}}(x)$ gerade.

(d) Es gibt kein γ mit $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\gamma]$.

Hinweis: Alle Rechnungen dürfen gerne auf ein Minimum reduziert werden.

Rechne in (c) modulo 2, schreibe $x = a + b\alpha + c\beta$ und verwende

$$\alpha^2 = 2\beta - \alpha, \ \alpha\beta = \alpha - 4 \text{ und } \beta^2 = \beta - 2\alpha - 2$$

Aufgabe 2. (Verzweigung in quadratischen Zahlkörpern)

Sei $d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei mit $d \not\equiv 1 \pmod 4$, setze $K := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

Bestimme für jedes $p \in \mathbb{P}$ die Primidealzerlegung, den Verzweigungsindex und den Trägheitsindex von (p) in $\mathcal{O}_K$. Ist p (total) verzweigt, zerlegt oder träge?

Aufgabe 3. (Gitter in $\mathbb{R}^n$)

Sei $n \in N$ und bezeichne λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$. Zeige:

(a) Sind $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ und ist

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_i \mid 0 \leq \mu_i < 1 \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, n\} \right\},$$

so ist $\lambda(P) = |\det(a_1, \ldots, a_n)|$.

(b) Ist $\Gamma \leq \mathbb{R}^n$ ein Gitter, so ist Γ genau dann vollständig, wenn eine beschränkte Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{R}^n = \bigcup_{\gamma \in \Gamma}(B + \gamma)$ existiert.

Aufgabe 4. (Ringsuche - ohne Hobbits oder Zauberer)

Konstruiere je einen Ring R mit genau zwei Primidealen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, die eine der folgenden Eigenschaften erfüllen:

(a) $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ sind beide maximal.

(b) $0 \neq p \subset q$.

Hinweis: Man starte in (a) mit dem Ring $\mathbb{Z}$ (einfach) oder dem Ring $\mathbb{Q}[X, Y]$ (schwer bis sehr schwer).
In (b) starte man mit dem Ring $\mathbb{Q}[X, Y]$ und verwende ohne Beweis, dass Ideale I, J mit $(0) \subset I \subset (X) \subset J \subset (X, Y)$ nicht prim sein können.

Abgabe bis Donnerstag, den 7. Juli um 10:00 Uhr in die Zettelkästen neben F411.