Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

30. Oktober 2009

Analysis I
2. Übungsblatt

Aufgabe 2.1 Für festes $\nu, n \in \mathbb{N}_0$ definiere man $s_n^{(\nu)} := \sum_{k=1}^{n} k^\nu$.

(a) Beweisen Sie nun, dass für beliebige $p, n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{\nu=0}^{p} \binom{p+1}{\nu} s_n^{(\nu)} = (n+1)^{p+1} - 1$$

gilt.

Hinweis: Wählen Sie $p \in \mathbb{N}_0$ fest und führen Sie eine vollständige Induktion in n durch. Denken Sie außerdem an den Binomischen Lehrsatz!

(b) Berechnen Sie Darstellungsformeln von $s_n^{(0)}, s_n^{(1)}$ und $s_n^{(2)}$ unter Verwendung von Teil (a).

Aufgabe 2.2 Geben Sie alle Teilkörper von $\mathbb{Q}$ bezüglich der üblichen Additions- und Multiplikationsregeln an.

Aufgabe 2.3 Sei K ein mit der Halbordnung „$\geq$“geordneter Körper und $x, y \in K$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Gilt $x > 0$, so folgt $-x < 0$.

(ii) Es gilt stets $0 \cdot x = 0$.

(iii) Es gilt $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

(iv) Gilt $y > x$, so existiert stets ein $z \in K$ mit $y > z > x$.

(v) Es existiert kein geordneter Körper mit endlich vielen Elementen.

Hinweis: Beachten Sie, dass Sie bei ihrer Argumentation nur die Körperaxiome aus Definition 2.13 und Relationseigenschaften aus Definition 2.15 verwenden.

Aufgabe 2.4 Seien X und Y nichtleere beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $X \subset Y$.

(i) Zeigen Sie $\sup X \leq \sup Y$ und $\inf Y \leq \inf X$.

(ii) Existieren zwei Mengen X und Y mit $X \neq Y$ und $\sup X = \sup Y$ sowie $\inf Y = \inf X$?

Abgabetermin: Freitag 6. November 2009, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.