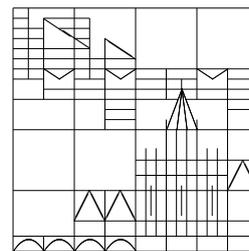


30. Oktober 2009



## Analysis I 2. Übungsblatt

**Aufgabe 2.1** Für festes  $\nu, n \in \mathbb{N}_0$  definiere man  $s_n^{(\nu)} := \sum_{k=1}^n k^\nu$ .

(a) Beweisen Sie nun, dass für beliebige  $p, n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{\nu=0}^p \binom{p+1}{\nu} s_n^{(\nu)} = (n+1)^{p+1} - 1$$

gilt.

HINWEIS: Wählen Sie  $p \in \mathbb{N}_0$  fest und führen Sie eine vollständige Induktion in  $n$  durch. Denken Sie außerdem an den Binomischen Lehrsatz!

(b) Berechnen Sie Darstellungsformeln von  $s_n^{(0)}$ ,  $s_n^{(1)}$  und  $s_n^{(2)}$  unter Verwendung von Teil (a).

**Aufgabe 2.2** Geben Sie alle Teilkörper von  $\mathbb{Q}$  bezüglich der üblichen Additions- und Multiplikationsregeln an.

**Aufgabe 2.3** Sei  $K$  ein mit der Halbordnung „ $\geq$ “ geordneter Körper und  $x, y \in K$ . Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (i) Gilt  $x > 0$ , so folgt  $-x < 0$ .
- (ii) Es gilt stets  $0 \cdot x = 0$ .
- (iii) Es gilt  $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$ .
- (iv) Gilt  $y > x$ , so existiert stets ein  $z \in K$  mit  $y > z > x$ .
- (v) Es existiert kein geordneter Körper mit endlich vielen Elementen.

HINWEIS: Beachten Sie, dass Sie bei ihrer Argumentation nur die Körperaxiome aus Definition 2.13 und Relationseigenschaften aus Definition 2.15 verwenden.

**Aufgabe 2.4** Seien  $X$  und  $Y$  nichtleere beschränkte Teilmengen von  $\mathbb{R}$  mit  $X \subset Y$ .

- (i) Zeigen Sie  $\sup X \leq \sup Y$  und  $\inf Y \leq \inf X$ .
- (ii) Existieren zwei Mengen  $X$  und  $Y$  mit  $X \neq Y$  und  $\sup X = \sup Y$  sowie  $\inf Y = \inf X$ ?