Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

13. November 2009

Analysis I
4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1 Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln. Dabei seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleer.

(i) Sei $A + B := \{c \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A\ \exists b \in B : c = a + b\}$, so gilt: Existieren $\sup A$ und $\sup B$, dann auch $\sup(A + B)$, und es gilt $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

(ii) Sei $-A := \{c \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A : c = -a\}$, und $\sup A$ existiere. Dann existiert $\inf(-A)$, und es gilt $\inf(-A) = -\sup A$.

Aufgabe 4.2 Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ ein Folge komplexer Zahlen. Zeigen Sie nun:

(i) $(z_n)_n$ ist genau dann eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ wenn $(\mathrm{Re}(z_n))_n \subset \mathbb{R}$ und $(\mathrm{Im}(z_n))_n \subset \mathbb{R}$ Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$ sind.

(ii) Es gilt $\lim_{n\to\infty} z_n = z \in \mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(z)$ und $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}(z)$ in $\mathbb{R}$ gilt.

(iii) (Vollständigkeit von $\mathbb{C}$): Zeigen Sie, dass jede Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ bereits konvergiert.

Aufgabe 4.3 („Sandwich-Lemma“) Gegeben seien Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ sowie $n_0 \in \mathbb{N}$. Für alle $n \geq n_0$ gelte $a_n \leq b_n \leq c_n$. Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien konvergent mit dem Grenzwert $g := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$. Zeigen Sie, dass dann auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit dem Grenzwert g.

Aufgabe 4.4 Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz für $n \to \infty$ und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

(i) $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$

(ii) $b_n := \frac{2^n + (-3)^n}{(-2)^n + 3^n}$, $n \in \mathbb{N}$

(iii) $c_n := \frac{n^2}{n^2+2n+2}$, $n \in \mathbb{N}$

(iv) $d_n := \frac{1}{n} i^n + 1$, $n \in \mathbb{N}$

Abgabetermin: Freitag 20. November 2009, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.