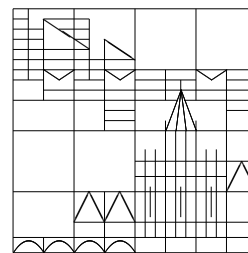


13. November 2009



Analysis I 4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1 Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln. Dabei seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleer.

- (i) Sei $A + B := \{c \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A \exists b \in B : c = a + b\}$, so gilt: Existieren $\sup A$ und $\sup B$, dann auch $\sup(A + B)$, und es gilt $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
- (ii) Sei $-A := \{c \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A : c = -a\}$, und $\sup A$ existiere. Dann existiert $\inf(-A)$, und es gilt $\inf(-A) = -\sup A$.

Aufgabe 4.2 Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ ein Folge komplexer Zahlen. Zeigen Sie nun:

- (i) $(z_n)_n$ ist genau dann eine Cauchy-Folge in \mathbb{C} wenn $(\operatorname{Re}(z_n))_n \subset \mathbb{R}$ und $(\operatorname{Im}(z_n))_n \subset \mathbb{R}$ Cauchy-Folgen in \mathbb{R} sind.
- (ii) Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \in \mathbb{C}$ in \mathbb{C} genau dann, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(z)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(z)$ in \mathbb{R} gilt.
- (iii) (Vollständigkeit von \mathbb{C}): Zeigen Sie, dass jede Cauchy-Folge in \mathbb{C} bereits konvergiert.

Aufgabe 4.3 („Sandwich-Lemma“) Gegeben seien Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ sowie $n_0 \in \mathbb{N}$. Für alle $n \geq n_0$ gelte $a_n \leq b_n \leq c_n$. Die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien konvergent mit dem Grenzwert $g := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$. Zeigen Sie, dass dann auch $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert mit dem Grenzwert g .

Aufgabe 4.4 Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz für $n \rightarrow \infty$ und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

- (i) $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$
- (ii) $b_n := \frac{2^n + (-3)^n}{(-2)^n + 3^n}, n \in \mathbb{N}$
- (iii) $c_n := \frac{n^2}{n^2 + 2n + 2}, n \in \mathbb{N}$
- (iv) $d_n := \frac{1}{n} i^n + 1, n \in \mathbb{N}$