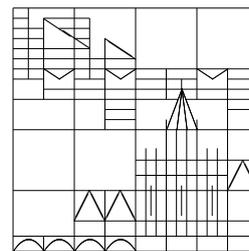


15. Januar 2010



Analysis I 11. Übungsblatt

Aufgabe 11.1 Berechnen Sie die nachfolgenden unbestimmten Integrale (ohne Formelsammlung!):

$$\begin{aligned} (i) \int e^x \sin(x) dx, & \quad (ii) \int x^2 \ln|x| dx, & \quad (iii) \int \frac{x^3 - 2x^2 + x + 5}{x^2 - 1} dx, \\ (iv) \int \frac{2x}{\tan(x^2)} dx, & \quad (v) \int \frac{1}{a^x + a^{-x}} dx, \quad (a > 0, a \neq 1), & \quad (vi) \int \frac{1}{\cosh(x)} dx. \end{aligned}$$

Aufgabe 11.2 Sei $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $x_0 \in (a, b)$. Außerdem existiere für jede Nullfolge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $x_0 \pm h_n \in (a, b)$ bereits der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0 - h_n)}{2h_n}.$$

Ist f an der Stelle x_0 differenzierbar?

Aufgabe 11.3 Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume und $T : X \rightarrow Y$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (i) Es existiert ein $C > 0$ mit $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ für alle $x \in X$.
- (ii) T ist stetig.
- (iii) T ist stetig in $0 \in X$.

HINWEIS: Verwenden Sie das ε - δ -Kriterium.

Aufgabe 11.4 Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum und $D \subset X$ ein dichter Unterraum. Zeigen Sie: Ist $T : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung und gibt es eine Konstante $C > 0$ mit $|Tx| \leq C\|x\|_X$ für alle $x \in D$, so existiert eine eindeutige lineare Fortsetzung $S : X \rightarrow \mathbb{R}$ von T mit $|Sx| \leq C\|x\|_X$ für alle $x \in D$.

HINWEIS: Gehen Sie folgendermaßen vor: (1) Zu $x \in X$ wähle eine Folge $(x_n)_n \subset D$ mit $x_n \rightarrow x$ und zeige, dass $(Tx_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist. (2) Definieren Sie $Sx := \lim_n Tx_n$ und zeigen Sie die Wohldefiniertheit von S (d.h. $\lim_n Tx_n$ ist von der gewählten Folge $(x_n)_n$ unabhängig). (3) Beweisen Sie die Linearität von S und $|Sx| \leq C\|x\|_X$.