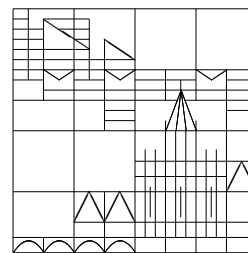


15. Januar 2010



## Analysis I 11. Übungsblatt

**Aufgabe 11.1** Berechnen Sie die nachfolgenden unbestimmten Integrale (ohne Formelsammlung!):

$$\begin{aligned} (i) \int e^x \sin(x) dx, & \quad (ii) \int x^2 \ln|x| dx, & \quad (iii) \int \frac{x^3 - 2x^2 + x + 5}{x^2 - 1} dx, \\ (iv) \int \frac{2x}{\tan(x^2)} dx, & \quad (v) \int \frac{1}{a^x + a^{-x}} dx, \quad (a > 0, a \neq 1), & \quad (vi) \int \frac{1}{\cosh(x)} dx. \end{aligned}$$

**Aufgabe 11.2** Sei  $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $x_0 \in (a, b)$ . Außerdem existiere für jede Nullfolge  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  mit  $x_0 \pm h_n \in (a, b)$  bereits der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0 - h_n)}{2h_n}.$$

Ist  $f$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar?

**Aufgabe 11.3** Seien  $(X, \|\cdot\|_X)$  und  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  normierte Räume und  $T : X \rightarrow Y$  eine lineare Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (i) Es existiert ein  $C > 0$  mit  $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$  für alle  $x \in X$ .
- (ii)  $T$  ist stetig.
- (iii)  $T$  ist stetig in  $0 \in X$ .

HINWEIS: Verwenden Sie das  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium.

**Aufgabe 11.4** Seien  $(X, \|\cdot\|_X)$  ein normierter Raum und  $D \subset X$  ein dichter Unterraum. Zeigen Sie: Ist  $T : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine lineare Abbildung und gibt es eine Konstante  $C > 0$  mit  $|Tx| \leq C\|x\|_X$  für alle  $x \in D$ , so existiert eine eindeutige lineare Fortsetzung  $S : X \rightarrow \mathbb{R}$  von  $T$  mit  $|Sx| \leq C\|x\|_X$  für alle  $x \in D$ .

HINWEIS: Gehen Sie folgendermaßen vor: (1) Zu  $x \in X$  wähle eine Folge  $(x_n)_n \subset D$  mit  $x_n \rightarrow x$  und zeige, dass  $(Tx_n)_n$  eine Cauchy-Folge ist. (2) Definieren Sie  $Sx := \lim_n Tx_n$  und zeigen Sie die Wohldefiniertheit von  $S$  (d.h.  $\lim_n Tx_n$  ist von der gewählten Folge  $(x_n)_n$  unabhängig). (3) Beweisen Sie die Linearität von  $S$  und  $|Sx| \leq C\|x\|_X$ .