Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

15. Januar 2010

Analysis I
11. Übungsblatt

Aufgabe 11.1 Berechnen Sie die nachfolgenden unbestimmten Integrale (ohne Formelsammlung!):

$$(i)\int e^x \sin(x)dx, \qquad (ii)\int x^2 \ln|x|dx, \qquad (iii)\int \frac{x^3-2x^2+x+5}{x^2-1}dx,$$
$$(iv)\int \frac{2x}{\tan(x^2)}dx, \qquad (v)\int \frac{1}{a^x+a^{-x}}dx,\ (a>0, a\neq 1), \qquad (vi)\int \frac{1}{\cosh(x)}dx.$$

Aufgabe 11.2 Sei $f:(a,b)\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $x_0\in(a,b)$. Außerdem existiere für jede Nullfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ mit $x_0\pm h_n\in(a,b)$ bereits der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0-h_n)}{2h_n}.$$

Ist f an der Stelle x_0 differenzierbar?

Aufgabe 11.3 Seien $(X,\|\cdot\|_X)$ und $(Y,\|\cdot\|_Y)$ normierte Räume und $T:X\to Y$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Es existiert ein $C>0$ mit $\|Tx\|_Y\le C\|x\|_X$ für alle $x\in X$.

(ii) T ist stetig.

(iii) T ist stetig in $0\in X$.

Hinweis: Verwenden Sie das ε-δ-Kriterium.

Aufgabe 11.4 Seien $(X,\|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum und $D\subset X$ ein dichter Unterraum. Zeigen Sie: Ist $T:D\to\mathbb{R}$ eine lineare Abbildung und gibt es eine Konstante $C>0$ mit $|Tx|\le C\|x\|_X$ für alle $x\in D$, so existiert eine eindeutige lineare Fortsetzung $S:X\to\mathbb{R}$ von T mit $|Sx|\le C\|x\|_X$ für alle $x\in D$.

Hinweis: Gehen Sie folgendermaßen vor: (1) Zu $x\in X$ wähle eine Folge $(x_n)_n\subset D$ mit $x_n\to x$ und zeige, dass $(Tx_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist. (2) Definieren Sie $Sx:=\lim_n Tx_n$ und zeigen Sie die Wohldefiniertheit von S (d.h. $\lim_n Tx_x$ ist von der gewählten Folge $(x_n)_n$ unabhängig). (3) Beweisen Sie die Linearität von S und $|Sx|\le C\|x\|_X$.

Abgabetermin: Freitag 22. Januar 2010, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.