Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

16. April 2010

Analysis II
1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1 Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $M \subset X$. Zeige, dass die offenen Mengen im metrischen Teilraum (M, d_M) mit

$$d_M \colon M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad d_M(m_1, m_2) := d(m_1, m_2)$$

gerade durch

$$\mathcal{O}_M = \big\{U \cap M \colon U \text{ offen in } (X, d)\big\}$$

gegeben sind.

Aufgabe 1.2 Zeigen Sie, dass die Menge

$$X := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1], y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1]\}$$

mit der euklidischen Metrik zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.
Hinweis: Machen Sie sich zunächst klar, was der Begriff 'offen' in $(X, |\cdot|)$ bedeutet.

Aufgabe 1.3

(i) Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Gilt $\lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0$ für ein $x \in \mathbb{R}^n$, so gilt auch
$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|.$$

(ii) Seien $\|\cdot\|_{(1)}$, $\|\cdot\|_{(2)}$ zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass diese schon äquivalent sein müssen (d.h. $\exists\, C_1, C_2 > 0\, \forall x \in \mathbb{R}^n : C_1\|x\|_{(1)} \le \|x\|_{(2)} \le C_2\|x\|_{(1)}$).
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, |\cdot|) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|_{(2)}/\|x\|_{(1)}$.

Aufgabe 1.4 Sei $p \in [1, \infty)$:

(i) Beweisen Sie, dass $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum ist.

(ii) Ist ℓ^p eine abgeschlossene Teilmenge von $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$? Begründen Sie ihre Antwort!

Abgabetermin: Freitag 23. April 2010, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.