Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

23. April 2010

Analysis II
2. Übungsblatt

Aufgabe 2.1 Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix der folgenden Abbildungen:

(i) $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1(e^{x_2} + e^{-x_3}) \\ x_1(e^{x_2} - e^{-x_3}) \end{pmatrix},$

(ii) $g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto |x|,$ (euklidische Norm)

(iii) $h\colon (0,\infty) \times (0,2\pi) \times (0,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}.$

Berechnen Sie hier außerdem $\det(J_h(r,\varphi,\theta))$.

Aufgabe 2.2 Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^m$, seien $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbare Abbildungen. Zeigen Sie, dass

$$\langle f,g\rangle\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \langle f(x), g(x)\rangle$$

differenzierbar ist und bestimmen Sie $\nabla\langle f,g\rangle$.

Aufgabe 2.3 Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bzw. eine Abbildung $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt *radialsymmetrisch*, wenn $f(Rx) = f(x)$ bzw. $F(Rx) = RF(x)$ ist für jede orthogonale Matrix $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Zeigen Sie: Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ radialsymmetrisch und differenzierbar, so ist auch $\nabla f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ radialsymmetrisch.

Aufgabe 2.4 Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 2$ schon $\Delta v_n(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt, wenn man

$$v_n(x) := \begin{cases} \log|x| & , n = 2 \\ |x|^{2-n} & , n \geq 3 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

definiert.

Abgabetermin: Freitag 30. April 2010, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.