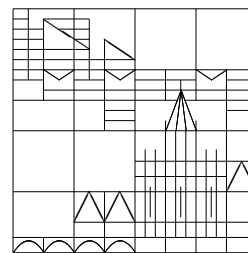


23. April 2010



Analysis II 2. Übungsblatt

Aufgabe 2.1 Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix der folgenden Abbildungen:

(i) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1(e^{x_2} + e^{-x_3}) \\ x_1(e^{x_2} - e^{-x_3}) \end{pmatrix},$

(ii) $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|, \quad (\text{euklidische Norm})$

(iii) $h: (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}.$

Berechnen Sie hier außerdem $\det(J_h(r, \varphi, \theta))$.

Aufgabe 2.2 Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf dem \mathbb{R}^m , seien $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbare Abbildungen. Zeigen Sie, dass

$$\langle f, g \rangle: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle f(x), g(x) \rangle$$

differenzierbar ist und bestimmen Sie $\nabla \langle f, g \rangle$.

Aufgabe 2.3 Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. eine Abbildung $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *radialsymmetrisch*, wenn $f(Rx) = f(x)$ bzw. $F(Rx) = RF(x)$ ist für jede orthogonale Matrix $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Zeigen Sie: Ist $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ radialsymmetrisch und differenzierbar, so ist auch $\nabla f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ radialsymmetrisch.

Aufgabe 2.4 Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 2$ schon $\Delta v_n(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt, wenn man

$$v_n(x) := \begin{cases} \log |x| & , n = 2 \\ |x|^{2-n} & , n \geq 3 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

definiert.