Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

30. April 2010

Analysis II
3. Übungsblatt

Aufgabe 3.1 Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie nun, dass alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2 existieren. Zeigen Sie außerdem, dass $\partial_x \partial_y f(0,0) \neq \partial_y \partial_x f(0,0)$ gilt. Steht dies im Widerspruch zu Satz 2.25?

Aufgabe 3.2 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar und $a \in U$ mit $\det f'(a) \neq 0$. Beweisen Sie nun, dass eine offene Menge $V \subset U$ mit $a \in V$ so existiert, dass $f_{|V}$ injektiv ist.

Hinweis: Führen Sie einen indirekten Beweis und verwenden Sie die Definition von Differenzierbarkeit.

Aufgabe 3.3 Man definiere die Funktionen

$$g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix},$$
$$g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (x^2+y^2-1)x \\ (x^2+y^2-1)y \end{pmatrix}.$$

(i) Geben Sie jeweils für g_1 und g_2 alle Punkte an, bei welchen die zugehörige Jacobi-Matrix invertierbar ist.

(ii) Argumentieren Sie außerdem, dass g_1 und g_2 in einer Umgebung von $a := (1,1)$ invertierbar sind und berechnen sie $(g_1^{-1})'(a)$ und $(g_2^{-1})'(a)$.

Hinweis: Sie dürfen Bemerkung 2.17 vewenden.

Aufgabe 3.4 (Übung zum Umgang mit Multiindizes) Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatzes: Ist $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ und $k \in \mathbb{N}_0$, so gilt

$$\left(\sum_{j=1}^m a_j \right)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} a^\alpha.$$

Hinweis: $\sum_{|\alpha|=k} := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^m : |\alpha|=k}$

Abgabetermin: Freitag 7. Mai 2010, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.