Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

7. Mai 2010

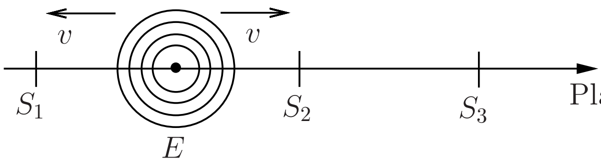
Analysis II
4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1 Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Extremwerte:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^4 - 2x^2 + 2x^2y^2 - y^2$

(ii) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto (x + y^2)\exp(-(x^2 + y^2))$.

Aufgabe 4.2 (Erdbeben im Pazifik) Mitten im Pazifik an einem tektonischen Plattenrand, welcher lokal als linear angenommen sei, sind drei seismische Messstationen S_1, S_2, und S_3 angebracht.



Zum Zeitpunkt $t = 0$ ereignet sich ein Erdbeben am Meeresgrund zwischen S_1 und S_2. Jede Station S_k misst nun die Ankunftszeit t_k der seismischen Welle. Der wahre Ort des Epizentrums sowie die wahre Geschwindigkeit der seismischen Welle sind unbekannt. Bei gegebenen Epizentrum E und Geschwindigkeit v würde die Welle theoretisch zum Zeitpunkt $\tilde{t}_k(E, v) = |S_k - E|/v$ an Station S_k ankommen. Aufgrund von Zeitmessfehlern an den Stationen und dem Fakt, dass die Wellengeschwindigkeit wegen wechselnder Bodenbeschaffenheiten nicht konstant ist, kann kein (E, v) gefunden werden mit $t_k = \tilde{t}_k(E, v)$ für alle $k \in \{1, 2, 3\}$. Finden Sie ein $E \in (S_1, S_2)$ und $v > 0$ derart, dass die Fehlerquadrate der gemessenen Zeit und der theoretischen Zeit

$$\sum_{k=1}^{3} (t_k - \tilde{t}_k)^2$$

minimal wird, wenn folgende Daten vorliegen:

$S_1 = 0\,\text{km}$,	$S_2 = 50\,\text{km}$,	$S_3 = 80\,\text{km}$,
$t_1 = 10\,\text{s}$,	$t_2 = 20\,\text{s}$,	$t_3 = 50\,\text{s}$.

Aufgabe 4.3 Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Für ein $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ definiert man nun die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(y + tv).$$

Zeigen Sie nun, dass $g''(0) = v^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{Hess}_f(y) \cdot v$ gilt.

Aufgabe 4.4 Sei $g(x, y) := 2x^2 - 3xy^2 + y^4$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass g im Punkt $(0, 0)$ kein lokales Minumum hat. Zeigen Sie weiterhin, dass g auf jeder Geraden durch $(0, 0)$ ein Minimum im Ursprung aufweist.

Abgabetermin: Freitag 14. Mai 2010, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.