Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

14. Mai 2010

Analysis II
5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 Zeigen Sie, dass jedes lokale Extremum von

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \sin(x)\sin(y)$$

ein globales Extremum ist.

Aufgabe 5.2 Sei $f\colon]0,\infty[^n \to \mathbb{R}, \quad (x_1,\dots,x_n) \mapsto \prod_{i=1}^n x_i$.

(i) Bestimmen Sie die Extremwerte von f unter der Nebenbedingung $g(x_1,\dots,x_n) := \sum_{i=1}^n x_i = 1$. Beachten Sie hierbei den Definitionsbereich von f!

(ii) Beweisen Sie mit Hilfe von (i) für alle $y_i > 0$, $i = 1,\dots,n$ die Ungleichung

$$\left(\prod_{i=1}^n y_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i.$$

Aufgabe 5.3 Seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto xy$ und $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$ mit $a,b > 0$.

(i) Zeigen Sie, dass f keine Extremstellen in $\mathbb{R}^2$ besitzt.

(ii) Bestimmen Sie die Extrema von f über den Höhenlinien $N_g(c)$, $c \geq 0$ von g.

(iii) Bestimmen Sie die Tangentialebene

$$z = g(v) + \langle \nabla g(v), (x,y)^T - v\rangle$$

von g in jedem Punkt $v \in N_g(c)$.

(iv) Bestimmen Sie die Tangente von $N_g(c)$ in jedem beliebigen Punkt $v \in N_g(c)$.

Aufgabe 5.4 Gegeben sei die Kurve $\Gamma = [\gamma]$ mit $\gamma(t) := e^{-t}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}, t \in [0,\infty[$.

(i) Skizzieren Sie den Wertebereich $\mathcal{R}(\gamma) := \gamma([0,\infty[)$.

(ii) Berechnen Sie den Tangenteneinheitsvektor und zeigen Sie, dass horizontale Tangenten genau an den Schnittpunkten mit der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten auftreten.

(iii) Berechnen Sie die Weglänge von Γ. Wieviel Prozent des Weges wird bereits in der ersten Umdrehung ($t \in [0,2\pi]$) zurückgelegt?

Abgabetermin: Freitag 21. Mai 2010, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.