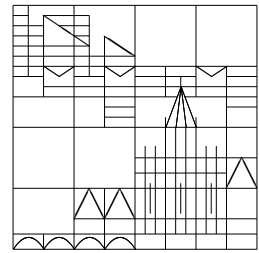


14. Mai 2010



Analysis II 5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 Zeigen Sie, dass jedes lokale Extremum von

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \sin(x) \sin(y)$$

ein globales Extremum ist.

Aufgabe 5.2 Sei $f :]0, \infty[^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{i=1}^n x_i$.

- (i) Bestimmen Sie die Extremwerte von f unter der Nebenbedingung $g(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n x_i = 1$. Beachten Sie hierbei den Definitionsbereich von f !
- (ii) Beweisen Sie mit Hilfe von (i) für alle $y_i > 0, i = 1, \dots, n$ die Ungleichung

$$\left(\prod_{i=1}^n y_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i.$$

Aufgabe 5.3 Seien $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$ und $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$ mit $a, b > 0$.

- (i) Zeigen Sie, dass f keine Extremstellen in \mathbb{R}^2 besitzt.
- (ii) Bestimmen Sie die Extrema von f über den Höhenlinien $N_g(c), c \geq 0$ von g .
- (iii) Bestimmen Sie die Tangentialebene

$$z = g(v) + \langle \nabla g(v), (x, y)^T - v \rangle$$

von g in jedem Punkt $v \in N_g(c)$.

- (iv) Bestimmen Sie die Tangente von $N_g(c)$ in jedem beliebigen Punkt $v \in N_g(c)$.

Aufgabe 5.4 Gegeben sei die Kurve $\Gamma = [\gamma]$ mit $\gamma(t) := e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, t \in [0, \infty[$.

- (i) Skizzieren Sie den Wertebereich $\mathcal{R}(\gamma) := \gamma([0, \infty[)$.
- (ii) Berechnen Sie den Tangenteneinheitsvektor und zeigen Sie, dass horizontale Tangenten genau an den Schnittpunkten mit der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten auftreten.
- (iii) Berechnen Sie die Weglänge von Γ . Wieviel Prozent des Weges wird bereits in der ersten Umdrehung ($t \in [0, 2\pi]$) zurückgelegt?