Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk
Mario Kaip

21. Mai 2010

Analysis II
6. Übungsblatt

Aufgabe 6.1 Sind $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ zwei glatte Wege, dann schreiben wir $\gamma_1 \sim \gamma_2$, falls diese nach Definition 3.6 äquivalent sind.

(i) Zeigen Sie, dass „$\sim$" eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller glatten Wege ist.

(ii) Gilt $\gamma_1 \sim \gamma_2$, so gilt auch $\gamma_1(a) = \gamma_2(c)$ und $\gamma_1(b) = \gamma_2(d)$.

(iii) Geben Sie eine Parametrisierung γ für die Menge $\gamma_1([a,b]) \cup \gamma_2([c,d])$ an, wenn $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ gilt. Ist γ auch wieder glatt?

Aufgabe 6.2 Unter $[y_1 \dots y_n]$ für $y_k \in \mathbb{R}^n$ verstehen wir die Matrix, deren Spalten durch die y_k gegeben sind. Für $i = 1, \dots, n$ definiert man die Funktionen

$$\varphi_i : \mathbb{R}^{(n^2)} \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto (x_{(i-1)n+1}, \dots, x_{in})^{\mathrm{T}}.$$

$$f : G \subset \mathbb{R}^{(n^2)} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \det([\varphi_1(x) \dots \varphi_n(x)])$$

mit $G := \{x \in \mathbb{R}^{(n^2)} : [\varphi_1(x) \dots \varphi_n(x)] \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})\}$.

(i) Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und geben Sie ∇f an.

(ii) Sei $x \in \mathbb{R}^{(n^2)}$ ein Extremwert von f unter der Nebenbedingung $|\varphi_i(x)| = 1$ $(i = 1, \dots, n)$. Zeigen Sie, dass $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ ist.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass G offen ist. Außerdem werden die üblichen Eigenschaften der Determinanten (z.B. Multilinearität, Stetigkeit) vorausgesetzt.

Aufgabe 6.3 Eine stetig differenzierbare Abbildung $T\colon D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *konform*, wenn die Winkel zwischen beliebigen sich schneidenden glatten Wegen γ_1 und γ_2 nach der Transformation mit T erhalten bleiben, d. h. wenn aus $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ schon

$$\frac{\langle \gamma_1'(t_1), \gamma_2'(t_2) \rangle}{|\gamma_1'(t_1)||\gamma_2'(t_2)|} = \frac{\langle (T \circ \gamma_1)'(t_1), (T \circ \gamma_2)'(t_2) \rangle}{|(T \circ \gamma_1)'(t_1)||(T \circ \gamma_2)'(t_2)|}$$

folgt. Zeigen Sie nun, dass

$$S\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad S(x,y) := \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)^{\mathrm{T}}$$

eine konforme Abbildung ist.

Hinweis: Berechnen Sie $S'(x,y)^{\mathrm{T}} S'(x,y)$. Das spart Rechenzeit.

Aufgabe 6.4 Wird ein Kreis vom Radius $r > 0$, welcher in der xz-Ebene des $\mathbb{R}^3$ liegt und den Mittelpunkt $(R,0,0)^{\mathrm{T}}$ mit einem $R > r$ hat, um die z-Achse rotiert, entsteht eine Oberfläche. Geben Sie eine Parametrisierung dieser Oberfläche an und zeigen Sie, dass dies eine 2-Fläche ist.

Abgabetermin: Freitag 28. Mai 2010, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.